



Mercurio y su perihelio

Víctor Rodríguez*

P. E. Lamberti†

In memoriam Dr. Víctor H. Hamity (1941-2023)

Resumen

El 25 noviembre de 1915, A. Einstein presentó las ecuaciones de campo de la teoría general de la relatividad. Esa fecha, no sólo marca el comienzo de una revolución en la física, la cosmología y la astrofísica, sino que es la culminación de un proceso iniciado en 1913 cuando, Einstein, junto con M. Grassmann publicaron las premisas fundamentales sobre las que una teoría relativista de la gravedad, debía formularse. El proceso que llevó a Einstein a la formulación correcta de la teoría estuvo lleno de cavilaciones. Sin embargo, en todo momento el problema del comportamiento anómalo del perihelio de Mercurio, estuvo como motivación y a su vez, árbitro de los avances logrados. El tema del rol jugado por esta anomalía en el perihelio de Mercurio ha sido extensamente estudiado. Sin embargo, su vigencia se muestra en el interés que suscitan nuevos hallazgos de comunicación epistolar entre distintos actores del proceso que condujo a la relatividad general. A su vez, pone de relieve que aún pequeñas discrepancias entre la observación y la teoría nunca deben ser subestimadas, pues pueden conducir, como en este caso, a una nueva física.

Palabras clave: Perihelio de Mercurio, teoría general de la relatividad.

Abstract

On November 25, 1915, A. Einstein presented the field equations of the general theory of relativity (GTR). That date not only marks the beginning of a revolution in physics, cosmology and astrophysics, but also that it is the culmination of a process that began in 1913 when Einstein, in

* Universidad Nacional de Córdoba

† Universidad Nacional de Córdoba

collaboration with M. Grassmann, published the fundamental premises on which a relativistic theory of gravity should be established. The process that led Einstein to the correct formulation of the theory was full of hesitations. However, along all the process the problem of the anomalous behavior of Mercury's perihelion was the motivator and simultaneously the arbiter of the progress achieved. The role played by this anomaly in the development of the GTR has been extensively studied. However, it remains to be of interest, mainly due to the new findings of epistolary communication between different actors in the process that led to GTR. At the same time, this history emphasizes that even small discrepancies between observation and theory should never be underestimated, as they can lead, as in this case, to new physics.

Keywords: Mercury's perihelion, General Theory of Relativity.

I. Introducción

Todo texto relacionado con las “verificaciones clásicas” de la Teoría General de la Relatividad (RG), incluye la explicación de la precesión anómala del perihelio de la órbita de Mercurio. Esta anomalía era conocida mucho antes de la teoría de Einstein, y está relacionada con el desplazamiento del perihelio del planeta más cercano al Sol, en aproximadamente 43” de arco por siglo, y que la teoría newtoniana no podía explicar. Esta falta de acuerdo con la teoría clásica fue un reto para físicos y astrónomos durante el siglo XIX. Concretamente a partir de 1859, cuando el astrónomo Urbain Le Verrier, famoso por haber predicho la existencia del planeta Neptuno en 1846, sugirió que el movimiento anómalo del perihelio de Mercurio se debía a la existencia de un planeta, aún no descubierto, cuya órbita debería encontrarse entre la órbita de Mercurio y el Sol. Ese planeta ficticio, pues nunca se observó, fue bautizado con el nombre de Vulcano. Se atribuía la dificultad de su observación a su cercanía con el Sol. La explicación final y consistente, a la anomalía en el perihelio, llegó en 1915, tras la formulación por parte de Einstein de las ecuaciones de campo de la RG.

El presente trabajo, de contenido histórico, intenta poner sobre la mesa el rol jugado por el problema del perihelio en la formulación de la RG. Curiosamente este tópico ha sido extensamente tratado en artículos de investigación y en muchos libros. Sin embargo, sigue siendo todavía

motivo de interés para los estudiosos de la historia de la RG. En este sentido se destaca un trabajo reciente de Michel Janssen y Jürgen Renn, quienes, tras el hallazgo de nueva correspondencia entre Einstein y su amigo Michele Besso, jerarquizan aún más el hecho que el problema del perihelio fue una guía central en la formulación de la RG (Janssen & Renn, 2021). Además, el interés en el problema del perihelio de Mercurio no se limita al aspecto histórico. El acceso a nuevas tecnologías de medición, conduce a acuerdos aún mayores con la RG (Will, 2018).

Desde nuestra perspectiva el estudio del comportamiento anómalo del perihelio de Mercurio resulta interesante, al menos por dos razones: 1) Permite adentrarse en la historia de las mediciones de gran precisión logradas por la astronomía del siglo XIX y 2) forma un eslabón clave en el estudio del desarrollo de la RG. La conexión entre ambos tópicos dejó una enseñanza muy importante para el desarrollo de las ciencias experimentales: aún pequeñas anomalías, por insignificantes que parezcan, pueden conducir a nueva física, y por lo tanto merecen la mayor atención.

Para darnos una idea de la magnitud del avance del perihelio de Mercurio, el corrimiento de $43.77''/\text{siglo}$ informado por Simon Newcomb (1895), significa que son necesarios más de 8000 años para que el perihelio se desplace 1 grado de arco (Newcomb, 1895).

II. Antes de la Relatividad

La gravedad newtoniana, victoriosa en casi todos los frentes, no sólo se encontró con el problema del perihelio de Mercurio. Ella mostraba algunas inconsistencias al tratar el problema cosmológico. Al suponer un universo infinito y representado por una geometría Euclídea, aparecían algunas cuestiones de difícil explicación. Por ejemplo, ¿por qué toda la materia del universo no colapsa en una única masa por acción de la gravedad? Esto llevó, entre otros, al astrónomo Hugo von Seeliger a publicar en 1895 un manuscrito con una propuesta de modificación de la gravedad newtoniana. Su razonamiento se reduce a la pregunta: ¿Vale la ley de gravitación de Newton para masas separadas por distancias inconmensurablemente grandes? (*unermesslich grosse Entfernung*) (von Seeliger, 1895). Mencionamos este trabajo por su pertinencia con el nuestro, pues von Seeliger razona que la gravedad newtoniana ofrece fuertes razones para creerla válida en el ámbito del sistema solar; no así necesariamente a un

nivel cosmológico. Sin embargo, sugiere que esta duda puede ser resuelta aplicándola a “ejemplos simples y obvios” (einfach und naheliegender Beispielen). von Seeliger fue estudiante del matemático Carl Neumann, quien trabajó en métodos matemáticos aplicados a problemas de astronomía teórica. Su aporte al problema de la cosmología newtoniana consistió en alterar la ecuación de Poisson (verificada por el potencial newtoniano) de tal modo que aceptase una solución de tipo para una partícula puntual de masa M , con r la distancia radial al centro en la partícula. Esto transformaba a la gravedad en una fuerza de alcance limitado. Es pertinente mencionar aquí que von Seeliger fue también uno de los que sugirieron como posible explicación al comportamiento anómalo del perihelio de Mercurio, la luz zodiacal, es decir una gran cantidad de pequeños objetos, orbitando alrededor del Sol y cuya luz se refleja sobre ellos.

Otra modificación pre-relativista a la teoría newtoniana fue propuesta en 1898 por Paul Gerber. Él sugiere una ley de gravedad con dependencia no sólo espacial sino también temporal (Gerber, 1898). Es interesante notar que la expresión para el potencial gravitatorio propuesto por Gerber es el mismo que el propuesto por Wilhelm Weber, en su teoría de acción a distancia de la electrodinámica (Maxwell, 1954). En el trabajo de Gerber se observa que la motivación principal en su modificación de la teoría newtoniana reside en el problema de las órbitas de los planetas. Es relevante notar que este autor asigna a la propagación de la acción gravitatoria, una velocidad igual a la de la luz. En 1917 el artículo de Gerber fue publicado por segunda vez, a instancias de Ernst Gehrcke. En la introducción a esta re-edición del trabajo de Gerber, Gehrcke dice: “Si, y cómo la teoría de Gerber puede ser incorporada a las bien conocidas ecuaciones del electromagnetismo, en una nueva teoría unificada, es un problema complejo, el cual espera todavía una solución”. Una cuestión no menor es que, si bien el potencial de Gerber da una tasa de precesión del perihelio correcta (tras hacer un razonamiento heurístico relacionado con un factor k que debe tener el valor igual a 6), no era tan claro su éxito al momento de calcular el desvío de la luz en un campo gravitatorio respecto de lo calculado con la RG: la teoría de Gerber predecía un factor $3/2$ del ángulo de desviación, respecto a lo predicho por la RG (Roseveare, 1982). El comentario de Gehrcke arriba entrecomillado, está fuertemente vinculado con estas inconsistencias, pues en definitiva la desviación de la

luz por efecto gravitatorio tiene que ver con la propagación de campos electromagnéticos en presencia de la acción gravitatoria.

III. La Relatividad entra en acción

Tras la formulación en 1905 por parte de Einstein de la Teoría Especial de la Relatividad (RE), muchos físicos enfrentaron el desafío de formular una teoría de la gravedad que fuese compatible con los postulados de la relatividad. Quizás uno de esos intentos más significativos fue el realizado por Gunnar Nordström, quien en realidad presentó dos teorías “relativistas de la gravedad”, una en 1912 y la otra en 1913. Esta última tiene el mérito de ser una teoría basada en la idea de espaciotiempo curvo (Nordström, 1913). Además del trabajo de Einstein, otros intentos en la misma dirección fueron conducidos por otros físicos, tales como Max Abraham y Gustav Mie. Es de destacar que la teoría de Nordström es una teoría basada en un campo escalar. Hermann Minkowski, quien había dado un marco geométrico a la RE, propuso una teoría vectorial para la gravedad; sin embargo M. Abraham observó que tal teoría no aceptaba como solución órbitas planetarias cerradas. No obstante, al concluir la sección dedicada a las teorías vectoriales de la gravedad, en su opúsculo (de menos de 60 páginas), titulado *Neuere Gravitationstheorien* (Nuevas teorías de la gravedad), Abraham rescata un avance provisto por estas ideas: “Habiendo colocado la discusión de la relación entre inercia, energía y gravedad sobre una base racional y de ese modo habiendo preparado el camino para la investigación de estas relaciones, es el beneficio de la nueva teoría de la gravedad lo que informaremos a continuación” (Abraham, 1915).

En 1911 Einstein consigue un puesto de profesor tiempo completo en la Universidad de Praga. Es ahí en donde empieza a interesarse en la formulación de una teoría relativista de la gravedad. La motivación inicial es lograr una teoría que permita calcular la desviación de la trayectoria de un rayo de luz que pase cerca del Sol (y que, según él, podría ser plausible de verificación observacional durante un eclipse). Su propuesta es una velocidad de la luz que dependa del potencial gravitatorio (Einstein, 1911):

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2} \right)$$

en donde c es la velocidad de la luz en las cercanías del cuerpo que produce el potencial gravitatorio Φ , y c_0 la velocidad de la luz lejos de ese cuerpo. Su razonamiento para llegar a esta expresión es simple: puesto que la masa inercial depende de la energía (consecuencia de la RE), podría ser que la velocidad de la luz dependa del potencial gravitatorio.

Probablemente debido a los inconvenientes que mostraban las teorías escalares y vectoriales para el campo gravitatorio (Nordström y Minkowski), Einstein se inclina por una teoría tensorial. Estas ideas preliminares fueron presentadas en el famoso artículo escrito en colaboración con M. Grassmann, hoy conocido como el Entwurf (Borrador de una teoría generalizada de la relatividad y una teoría de la gravedad) (Einstein y Grassmann, 1913). Es en ese trabajo en el que aparece la conocida expresión para el elemento de línea, que da la distancia infinitesimal entre dos puntos cercanos en el espaciotiempo,

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

siendo g_{ij} las componentes del tensor métrico, y x_i las coordenadas de un evento espaciotemporal. Es importante remarcar que las cantidades g_{ij} (10 en total) representan en la concepción einsteiniana, al campo gravitatorio. En el Entwurf se presentan las ideas físicas básicas de una posible teoría (que debería reproducir en cierto límite a las ecuaciones de Newton) y aparece lo que podríamos identificar como el primer germen de las ecuaciones de campo de la RG.

El punto relevante para nuestro trabajo, es que Einstein propone a su amigo M. Besso, usar el Entwurf para calcular la precesión del perihelio de Mercurio. Tras una comunicación epistolar intensa, obtienen un resultado desalentador. El valor para la precesión del perihelio es de sólo 18" por siglo. Esto produce una crisis en Einstein, que termina reconociendo a David Hilbert en una carta fechada el 7 de noviembre de 1915, y asegura haber cometido tres errores (Earman y Glymour, 1978):

1. La covariancia restringida no incluye a las rotaciones uniformes;
2. La precesión del perihelio de Mercurio resulta muy pequeña (por un factor 1/2);

3. La prueba (presentada en 1914) de la unicidad del Lagrangiano es incorrecta.

La versión final de las ecuaciones de campo de la RG es presentada en un trabajo enviado por Einstein, el 25 de noviembre de 1915, a la Academia Prusiana de Ciencias de Berlín. Previo a este trabajo, y mostrando cierto nerviosismo, Einstein publica en ese mismo noviembre cuatro trabajos sobre las ecuaciones de campo. Para poner esos trabajos en contexto, tenemos presente que las ecuaciones de campo de la RG son:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = -\kappa T_{ij}$$

Aquí, R_{ij} es el tensor de Ricci, asociado con la curvatura del espacio-tiempo, κ es una constante (que involucra la constante de la gravedad de Newton y a la velocidad de la luz); y T_{ij} es el tensor encargado de dar cuenta de la distribución de masa y energía. Con esto en mente, se puede caracterizar cada uno de estos trabajos de la siguiente forma: 1) En el primero aparece una versión modificada de las ecuaciones presentadas en el *Entwurf*, bajo la premisa de que las ecuaciones debían ser covariantes frente a cambios de coordenadas generalizados (x_i) (este es un modo matemático de enunciar el Principio de Equivalencia previamente enunciado por Einstein); 2) En el segundo, se ocupa de darle al término de materia-energía, ciertas propiedades compatibles con esa covariancia; 3) En el cuarto presenta las ecuaciones propuestas en el segundo, de una manera más prolija y convincente, y 4) Es en el tercero de esta serie de publicaciones en el que utiliza las ecuaciones del segundo trabajo para calcular la precesión del perihelio de Mercurio, obteniendo los tan deseados 43" por siglo (Janssen y Renn, 2015). La expresión encontrada para tal desplazamiento es

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{(1 - e^2 c^2 T^2)}$$

donde a es el semieje mayor de la órbita planetaria (en centímetros), e la excentricidad numérica, $c = 3.1010$ y T el período de revolución en segundos¹.

IV. Conclusiones

Pocos meses después de la presentación de las ecuaciones de campo de la RG, el astrónomo Karl Schwarzschild las resolvió de manera exacta, para el caso de una masa puntual. Esa solución describe la geometría del espaciotiempo en las cercanías de una masa M y es hoy día bastante conocida, pues está asociada con los agujeros negros. Einstein se sorprendió de que sus ecuaciones pudieran ser resueltas de manera exacta. En la obtención de esa solución, Schwarzschild también estaba interesado en la solución del problema del perihelio de Mercurio, como se lo hace saber a Einstein en una carta escrita desde el frente ruso (durante la Primera Guerra Mundial), con fecha 22 de diciembre de 1915 (Schwarzschild, 1998). En una carta a Hendrik Lorentz (fechada en enero de 1916), Einstein le comenta al físico holandés lo desgastante que fue el proceso que lo condujo a las ecuaciones de la RG:

“Durante el pasado otoño, el haberme dado cuenta de manera paulatina de la incorrectitud de las viejas ecuaciones de la gravedad (las de 1914), me produjo *tiempos difíciles* (böse Zeiten)”.

De acuerdo a su biógrafo y amigo Abraham Pais, “el cálculo correcto del avance del perihelio de Mercurio, fue la experiencia más excitante de la vida científica de Einstein”. Y lo vuelve a expresar de una manera mucho más estética: “...La Naturaleza le habló!!” (Pais, 1984).

Referencias

Janssen, M. and Renn, J. (2021). *Einstein and the Perihelion Motion of Mercury, Excerpts from How Einstein Found His Field Equations. Sources and Interpretation*. Disponible en <https://arxiv.org/abs/2111.11238>.

¹ Elegimos esta expresión pues es la escrita por Einstein en, por ejemplo, su libro “El significado de la Relatividad”, Espasa-Calpe, Madrid 1971.

- Will, C. (2018). New General Relativistic Contribution to Mercury's Perihelion Advance. *Phys. Rev. Lett.* 120, 191101.
- Newcomb, S. (1895). *The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constant of Astronomy*. Washington (EEUU), US Government Printing Office. Disponible en <https://ia600209.us.archive.org/13/items/elementsoffourin00newcrich/elementsoffourin00newcrich.pdf>.
- von Seeliger, H. (1895). Über das Newton'schen Gravitationsgesetz. *Astronomische Nachrichten*, Band 137 N° 3273. Disponible en: <http://www.berrigan.org/physique/%C3%9Cber%20das%20Newton%E2%80%99sche%20Gravitationsgesetz%20-%20Seeliger.pdf>.
- Gerber, P. (1898). Die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 43, 93-104. Disponible en: <https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/28412093>.
- Maxwell, J. C. (1954). *A Treatise of Electricity and magnetism*. Dover, New York. Ver capítulo XXIII.
- Roseveare, N.T. (1982). *Mercury's perihelion. From Le Verrier to Einstein*. Clarendon Press, Oxford. Ver discusión desde la página 142 en adelante.
- Nordström, G. (1913). Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitätsprinzips, *Annals der Physik*, Volume 347, Issue 13. Disponible en <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/andp.19133471303>.
- Abraham, M. (1915). Neure Gravitationstheorien, *Jahrbuch der Radioakt. U. Elektronik* XI. 4 Disponible en <https://dlc.mpg.de/fullscreen/1800098030/1/>.

- Einstein, A. (1911). Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes, *Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik* IV. 4. Disponible en [https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/ andp.19113401005](https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19113401005)
- Einstein, A. y Grassmann M. (1913). *Entwurf einer Verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der gravitation*, Druck und Verlag von B.G. Teubner. Disponible en <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01999515>
- Earman, J. y Glymour, C. (1978). Einstein and Hilbert: Two months in the history of general relativity. *Arch. Hist. Exact Sci.* 19, 291–308. Disponible en <https://doi.org/10.1007/BF00357583>
- Janssen, M. y Renn, J. (2015). Arch and scaffold: How Einstein found his field equations, *Physics Today*, número de noviembre, pag. 30. Disponible en <https://pubs.aip.org/physicstoday/article/68/11/30/414987/Arch-and-scaffold-How-Einstein-found-his-field>
- Schwarzschild, K. (1998). *Gesammelte Werke*, Springer Verlag.
- Pais, A. (1984). El Señor es sutil. La ciencia y la vida de A. Einstein. Editorial Ariel, España.