Tres intentos fallidos para determinar la órbita de Marte

Sandra Lorena Ponce*

Resumen

Una de las características más llamativas de *Astronomía Nova* es que hace a los lectores testigos de los logros, pero también de las dificultades que tuvo Kepler para llegar a las dos primeras leyes. En el capítulo 40, Kepler enuncia la ley de las áreas que será fundamental para los desarrollos que siguen. A partir de suponer una órbita circular, determina el diámetro, el centro, la excentricidad y la línea absidal. Luego, asumiendo la bisección de la excéntrica y la ley de las áreas como ciertas, encuentra errores en las longitudes de Marte. Concluye que el error provino de suponer una órbita circular. A partir de este resultado se propone encontrar la verdadera trayectoria de Marte y describe tres intentos, dos de los cuales resultan fallidos. Kepler finalmente determina la forma de metopoide para la órbita de Marte, asumiendo y combinando la hipótesis vicaria y la trayectoria oval, ambas falsas.

Palabras clave: órbita de Marte, hipótesis vicaria, ley de áreas, órbita oval, metopoide.

Abstract

One of the most striking characteristics of Astronomía Nova is that it makes readers witness the achievements, but also the difficulties that Kepler had in arriving at the first two laws. In chapter 40, Kepler states the law of areas that will be fundamental for the developments that follow. Starting from assuming a circular orbit, he determines the diameter, center, eccentricity and apsidal line. Then, assuming eccentric bisection and the law of areas to be true, he finds errors in the longitudes of Mars. He

* Universidad Nacional Tres de Febrero, Argentina.

concludes that the error came from assuming a circular orbit. From this result he sets out to find the true trajectory of Mars and describes three attempts, two of which are unsuccessful. Kepler finally determines the metopoid shape for the orbit of Mars, assuming and combining the vicarious hypothesis and the oval trajectory, both false.

Keywords: Mars orbit, vicarious hypothesis, area law, oval orbit, metopoid.

I. Introducción

Astronomía Nova es la obra en la que Kepler desarrolla sus dos primeras leyes. La particularidad de este tratado es la presencia de indicios de la construcción de dichas leyes. El mismo Kepler expuso las marchas y contramarchas de su razonamiento y los fracasos parciales de su investigación. El presente trabajo se propone hacer un recorrido de los desarrollos que llevaron a Kepler a definir una primera aproximación a la órbita de Marte, presentada en el capítulo 46 de Astronomía Nova. Su intención era, a partir de las causas físicas del movimiento planetario, seguir un camino geométrico para definir la forma que determina la trayectoria del Marte. Para ello considera los resultados que fue encontrando a lo largo de los capítulos 16 a 45 y se apoya en un sistema heliocéntrico pero con las consideraciones ptolemaicas del punto ecuante. En el capítulo 16 expone un método para hallar el centro del círculo planetario sobre el cual se encontrarían las posiciones del planeta (en este caso, la Tierra). Este método ofrece posiciones zodiacales (ángulos) correctos, pero las distancias al Sol no se corresponden con las observadas. En el capítulo 32 se establece la proporcionalidad inversa entre la distancia al Sol y la velocidad del planeta. Los capítulos 33 a 39 describe los rudimentos de una teoría magnética (que luego completará en el capítulo 57). En los capítulos 41 a 43 siembra la sospecha de una órbita no circular hasta que en el capítulo 44 ofrece dos argumentos para defender la afirmación de que el planeta se desvía de una trayectoria circular. En el capítulo 45, mediante la consideración de un movimiento compuesto con un epiciclo, llega a la conclusión de que la trayectoria de Marte describe un óvalo. La estrategia de este trabajo consiste en hacer un análisis de los resultados parciales de Astronomía Nova que van configurando el argumento que le permite a Kepler definir la órbita de Marte. Omitiendo los cálculos complejos que se encuentran en la obra, se expone el camino que lleva la trayectoria circular a un metopoide.

II. La hipótesis vicaria

En el capítulo 16 Kepler describe un método para hallar la posición del planeta en un tiempo determinado. Su objetivo era resolver el problema del movimiento variable, es decir, el hecho de que el planeta recorría arcos iguales en tiempos distintos. Este problema, conocido como primera anomalía, ya había sido tratado por Plomeo en el *Almagesto*. La estrategia ptolemaica se apoyó en un punto imaginario dentro de la excéntrica, el punto ecuante, alrededor del cual se traza una circunferencia cuyos arcos representan el tiempo que demora un planeta en recorrer un arco determinado de la trayectoria. El centro de la trayectoria del planeta era el punto medio entre el ecuante (D) y el observador (E) o centro de la Tierra [Fig. 1]. Esto se conoce como la bisección de la excéntrica.

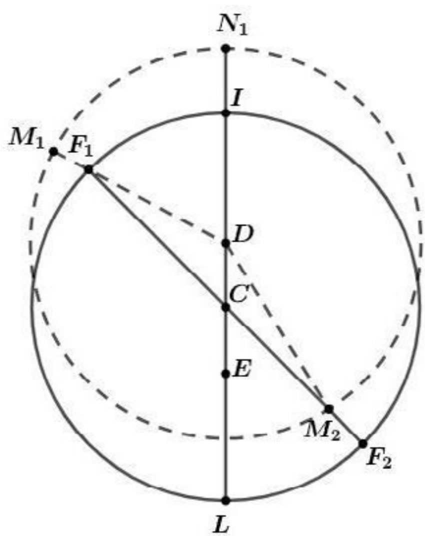

Figura 1.

El planeta que recorre el arco IF_1 demora un tiempo que está determinado por el arco N_1M_1. Sin embargo, recorrer un arco LF_2 congruente y opuesto al anterior, le llevaun tiempo menor representado por el arco N_2M_2. Ptolomeo no ofreció causas físicas que lo llevaran a bisecar el segmento DE para encontrar el centro de la trayectoria del planeta (Kepler, 2015 p.47).

Kepler se propone encontrar el centro de la trayectoria planetaria a partir de consideraciones físicas, pero adoptando la teoría heliocéntrica copernicana. Para ello mantiene el supuesto de que la trayectoria del planeta es un círculo perfecto y adopta la hipótesis del punto ecuante de Ptolomeo. En algún punto C entre el punto ecuante (D) y el centro del Sol (A) se encuentra el centro del círculo planetario. Kepler decidió no asumir la bisección de la excentricidad, a pesar de haber encontrado en su Mysterium, una causa física para sostenerla. Así, apoyándose en observaciones, calculó las excentricidades e_1 y e_2 que son las distancias que C guarda con A y con D, respectivamente. En la figura 2 podemos observar la diferencia de las dos excéntricas.

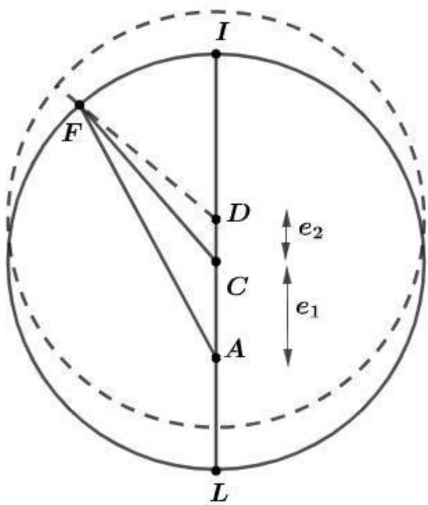

Figura 2.

Para calcular las excentricidades, Kepler consideró que eran necesarias cuatro oposiciones en lugar de las tres tomadas por Ptolomeo. Basado en estas observaciones, elaboró un método de cálculo, considerado por él mismo como tedioso, que arrojó los valores $e_1 = 0{,}11332$ y $e_2 = 0{,}07232$, considerando $R = 1$ para el radio de la excéntrica [Fig. 2]. Estos resultados fueron confirmados por doce oposiciones más con un error máximo de, aproximadamente, 2´. La órbita planetaria a partir de este método no daba, sin embargo, las distancias correctas entre el planeta y el Sol (AF). No podía tratarse de la órbita verdadera. Kepler llamó hipótesis vicaria a la excéntrica hallada en contraposición con la hipótesis física (verdadera) que buscaba (Aiton, 1975 p. 254).

III. La trayectoria oval

Los capítulos 33 a 39 describen los rudimentos de la teoría magnética de Kepler que será completada en el capítulo 57 de *Astronomía Nova*. En esos capítulos se expone la influencia de la fuerza motora que el Sol tiene sobre los planetas los cuales, a su vez, cuentan con una fuerza propia. Kepler pudo justificar la variación inversa de los tiempos con la distancia del planeta al Sol a partir de una fuerza que emana de él (Aiton, 1975, p. 576). En el capítulo 39 Kepler muestra que no es posible dar una causa física para afirmar que la trayectoria del planeta es un círculo perfecto. Se trata del producto de la composición de dos movimientos circulares. El primero generado por la propia fuerza del planeta que lo mueve en un epiciclo y el segundo generado por la fuerza del Sol que atrae al planeta y mueve al centro del epiciclo en un círculo perfecto.

El capítulo 44 ofrece dos argumentos para sostener la no circularidad de la órbita de Marte. El primero consiste en tomar tres observaciones con las cuales define una órbita circular, y comparar las posiciones con las obtenidas empíricamente. Encuentra que los valores son siempre menores, la diferencia es mayor hacia las cuadraturas. El segundo argumento se basa en la ley de las áreas la cual establece la proporcionalidad entre el área que barre el planeta desde C y el tiempo que le lleva llegar a esa posición. Sin embargo, encuentra que el tiempo hacia las cuadraturas es menor, por lo tanto, el área es menor y la figura que describe el recorrido debe ser más angosta a los lados y debe estar circunscrita al círculo presupuesto.

Al comienzo del capítulo 45, Kepler afirma que la comprensión de la naturaleza es tan maravillosa como ella misma y que por eso se dedicará a detallar las causas naturales de la desviación del círculo. Este desarrollo es necesario para la comprensión de dichas causas, a pesar de la dificultad que pueda significar al lector. A partir de este capítulo y hasta el 50, se resuelven los errores provenientes de suponer la órbita circular.

Según el capítulo 39, para describir un círculo perfecto, el planeta se apartaría de la fuerza ejercida por el rayo AC por su propia fuerza motriz. Este movimiento genera un epiciclo a partir del cual el planeta regula sus posiciones para lograr una órbita circular. Para describir este círculo perfecto, el segmento determinado por la posición del planeta y el centro del epiciclo debe ser paralelo al segmento AB. Esto sucede solo si, cuando el rayo AC llega a **γ**, el planeta se mueve de **γ** a D. La velocidad de este movimiento no es uniforme: cuanto mayor sea el rayo menor es la distancia que debe recorrer el planeta.

Sin embargo, a Kepler le pareció absurdo que el planeta, al moverse de **γ** a D a velocidad no uniforme, se desprendiera del rayo de energía del Sol y se re-acomode por su propia fuerza. Para describir una órbita circular el planeta debe acelerar manteniendo la linea ND paralela a AB [Fig. 3]. Sabiendo que el planeta describe un óvalo en vez de un círculo, tal como se demostró en los capítulos 39 a 44, se hace necesaria una explicación física.

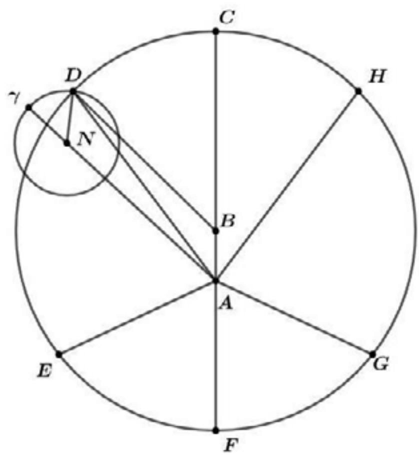

Figura 3.

William H. Donahue (1996, p. 281) sostiene que la hipótesis de la órbita ovalada fue formulada siete años antes de la publicación de *Astronomía Nova*.

Para evitar el absurdo expuesto en el párrafo anterior, Kepler propone que el rayo AC viaje con velocidad variable mientras que el planeta se mueve de manera uniforme de $\boldsymbol{\gamma}$ a D. Así el planeta ubicado en D no permanecerá en el círculo que comenzó a describir desde C, sino que se inclinará hacia la linea absidal a medida que que llega a las cuadraturas. Esta situación se debe a las observaciones que muestran que el diámetro del epiciclo está inclinado en las longitudes medias: ND no permanece paralelo a AB. Si N y $\boldsymbol{\gamma}$ se mueven uniformemente alrededor de A y de N, respectivamente, DN se mantendría paralela a AB. Pero esto no sucede.

Se confirma, entonces lo argumentado en el capítulo 44, la figura está circunscrita a la circunferencia CF. Además, las ecuaciones físicas calculadas indican que el planeta debería ir más rápido a los lados de la excéntrica, es decir, que su distancia al Sol será menor en cuadraturas. Este "achatamiento" de la órbita es producto de dos movimientos: el que ejerce la fuerza motriz del Sol y el esfuerzo del planeta por describir partes iguales en tiempos iguales. Sin embargo, la fuerza del sol acelera al planeta cuando la distancia que los separa es más corta. Así, las distancias en arcos iguales del epiciclo se acumulan cerca del afelio C y del perihelio F y están más dispersas en las cuadraturas.

En resumen, el capítulo 45, basado en las consideraciones magnéticas del capítulo 39, llega de manera concluyente a que la órbita de Marte es ovalada. En el capítulo 46 Kepler intenta determinar las posiciones del planeta para determinar cuál es la figura que realmente describe el planeta. Expone tres intentos de los cuales dos resultan fallidos. Estos fracasos se deben la insistencia en encontrar un camino geométrico para hallar la órbita del planeta. Al no lograrlo se resigna a asumir una combinación de hipótesis falsas de las que resulta la figura buscada.

IV. Tres intentos para determinar la órbita de Marte

IV.1 Primer intento

Se considera la excéntrica bisecada que representa la trayectoria del planeta considerada circular y el círculo ecuante que determina el tiempo que le toma al planeta ir de un punto a otro de su órbita [Fig. 4]. En el capítulo 32 se demostró que el tiempo es al arco de trayectoria correspondiente como la distancia del planeta al Sol es a la distancia del planeta al centro de la excéntrica.

$$\frac{arco\ de\ tiempo}{arco\ de\ trayectoria} = \frac{distancia\ del\ planeta\ al\ Sol}{distancia\ del\ planeta\ al\ centro\ de\ la\ excéntrica}$$

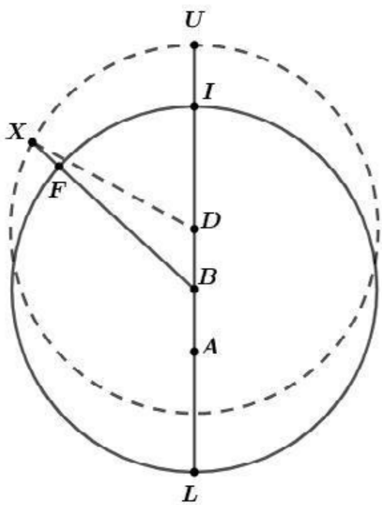

Figura 4.

Sea D el punto ecuante, UX el arco de tiempo, IF el arco de trayectoria y los segmentos AI y BI las distancias al Sol y al centro de la excéntrica respectivamente, se obtiene con base en la figura

$$\frac{arco\ de\ tiempo}{arco\ de\ trayectoria} =$$

$$\frac{arcoUX}{arcoIF} = \frac{AI}{BI}$$

$$\frac{BI}{arcoIF} = \frac{AI}{arcoUX}$$

Pero dado que el arco UX representa al tiempo, puede expresarse BI/AI es una constante, por lo tanto el arco IF resulta una medida

$$\frac{BI}{arcoIF} = \frac{AI}{t}$$

$$arcoIF = \frac{BI}{AI} \cdot$$

adecuada del tiempo. Es importante aclarar que Kepler considera que una cantidad mide algo cuando dichas magnitudes son proporcionales. Sin embargo, dada la fuerza que ejerce el Sol sobre el planeta, la trayectoria del planeta no está determinada por el arco IF.

G representa algún punto a una distancia AF que se encuentra inclinado hacia la linea absidal debido a la atracción del planeta al Sol [Fig. 5]. La fuerza que ejerce dicha atracción acelera al planeta de modo que se mueve más lentamente cerca del afelio y más rápido cerca del perihelio.

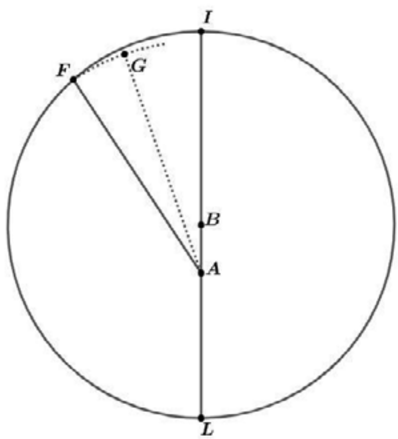

Figura 5.

En la figura 6 se divide la excéntrica en arcos de 1° se generan distintas posiciones sobre el círculo a las que se denominaránF_i. Los arcos determinados por estas divisiones cumplen con la siguiente condición

$$\frac{arcoIF_i}{arcoIG_i} = \frac{AF_i}{BF_i}$$

Pero esto sucede tanto con los arcos de 1° como con arcos correspondientes a un ángulo de amplitud α. Si dicho ángulo resulta de la suma de ángulos de 1° se tiene que

$$\frac{arcoIF_i}{arcoIG_i} = \frac{\Sigma AF_i}{\Sigma BF_i}$$

Tanto la suma ΣAF_i como ΣBF_i están contenidas en las áreas que determina cada distancia con el arco correspondiente.

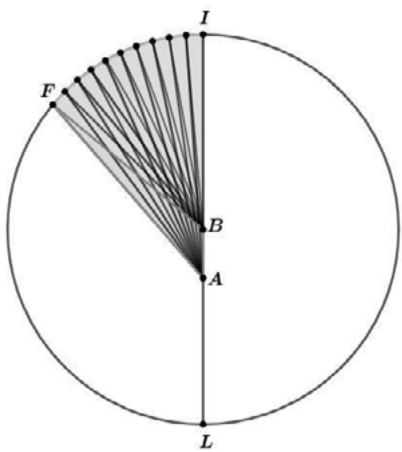

Figura 6.

Por lo expuesto en el capítulo 40, el área IAF mide el tiempo y puede establecerse la siguiente igualdad

$$\frac{arcoIF}{arcoIG} = \frac{\acute{a}reaIAF}{\acute{a}reaIBF}$$

$$arcoIF \cdot \acute{a}reaIBF = arcoIG \cdot \acute{a}reaIAF$$

Habíamos dicho que el arco IF era una medida adecuada del tiempo, por lo tanto, el área IBF también lo es:

$$arcoIF = cte_1 \cdot \acute{a}reaIBF = cte_2 \cdot tiempo$$

$$arcoIF = \frac{cte_1 \cdot arcoIG \cdot \acute{a}reaIAF}{arcoIF}$$

$$(arcoIF)^2 = cte_1 \cdot arcoIG \cdot \acute{a}reaIAF$$

El producto del arco IG y el área IAF es una medida del cuadrado del tiempo. Con la ecuación resultante podría encontrarse el valor numérico del arco IG. Pero lo que Kepler necesita es la posición del punto G, para ello es necesario un método geométrico y no algebraico. Debería existir la posibilidad de construir un sector FBG que resulte equivalente al triángulo FAB. Por otra parte, si bien en el capítulo 40 se enuncia la ley de las áreas como herramienta de cálculo, la suma de las distancias no es exactamente igual al área que las contiene, aunque en el capítulo 43 Kepler muestra que la diferencia es mínima.

IV.2 Segundo intento

Se vuelve a separar a la excéntrica en arcos de 1°, lo que determina los puntos F. El planeta está en algún lugar G, de modo que AG es igual a AF. A partir de los tiempos determinados por cada arco IF se puede calcular la distancia AF correspondiente. El objetivo es encontrar las posiciones G a partir del ángulo FAG.

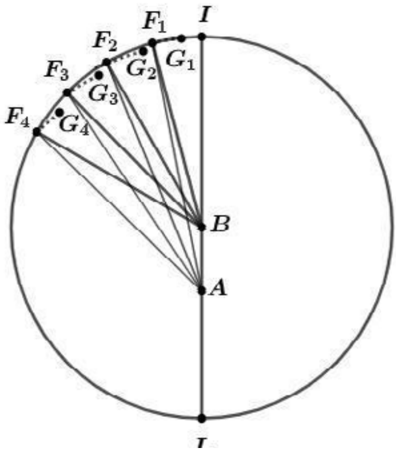

Figura 7.

Sabemos, por el capítulo 40, que el área que se extiende entre el arco de la verdadera trayectoria IG y el Sol, también determina la medida del tiempo que le toma al planeta recorrer dicho arco. Las áreas IAF contienen a los sectores IBF. Si se considera el punto N, intersección entre AG y FB, al sustraer el área GNF de IBF y unirle el área BNA, se obtiene el área que barre el planeta desde el Sol en la trayectoria IG [Fig. 8 y Fig, 9].

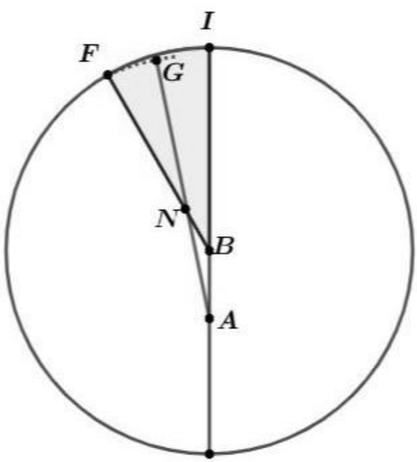

Figura 8.

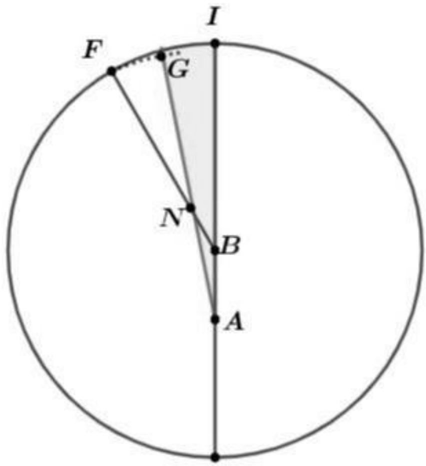

Figura 9.

Dado que la suma de las distancias desde A también determina el tiempo, podemos reemplazar a los sectores IBF por las áreas IAG en la proporción

$$\frac{sectorIBF_1}{sectorIBF_2} = \frac{arcoIF_1}{arcoIF_2}$$

por lo tanto

$$\frac{sectorIAG_1}{sectorIAG_2} = \frac{arcoIF_1}{arcoIF_2}$$

Pero pedir esta igualdad sería demasiado fuerte. Para que las proporciones se mantengan no es necesario que las componentes sean iguales, es suficiente con que N corte a BF_2 y a AG_1 en la misma proporción puesto que el sector IBF es el producto del área IAG multiplicada por una constante. En la figura 9 GV_1 y GV_2 son perpendiculares a FB y AG respectivamente, GV_1N y GV_2N resultan semejantes, por lo tanto

$$\frac{FN}{BN} = \frac{AN}{GN}$$

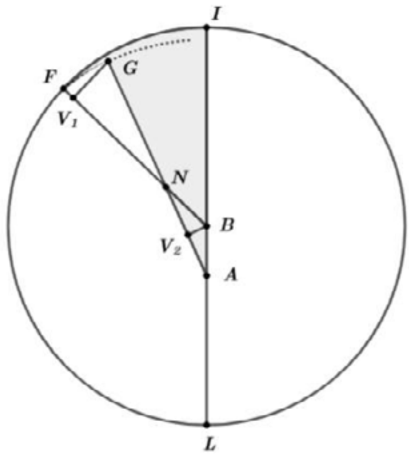

Figura 10.

Sin embargo, no es posible determinar la posición de N dado que no hay un método geométrico para cortar a un semicírculo en una razón dada con una recta trazada desde un punto dado del diámetro, en este caso, A. Tampoco existe, con las herramientas geométricas disponibles, un método confiable para saber si la diferencia entre los sectores IBF y las áreas IAG correspondientes están en la misma razón que el resto de los pares.

IV.3 Tercer intento

Los intentos anteriores exponen la imposibilidad de hallar la posición la forma correcta de la trayectoria de Marte deductivamente. Kepler se resigna a tomar un camino no geométrico. Se apoya en la hipótesis vicaria expuesta en el capítulo 16 que le permite calcular la posición zodiacal para un tiempo determinado. Sin embargo, las distancias obtenidas por este método no son correctas. Por lo tanto, es necesario considerar la conclusión del capítulo 45. Combinando en un diagrama ambas hipótesis, consideradas falsas por el propio Kepler, intentará encontrar las posiciones de Marte en tiempos determinados.

La propuesta de la hipótesis vicaria consiste en considerar la excentricidad AD del punto ecuante tal como se hizo en el capítulo 16. La proporción encontrada en dicho capítulo para determinar el centro C de la excéntrica fue AC = 11.332 y CD = 7.232 para un radio de la excéntrica centrada en C de CH = 100.000. Se toma un ángulo conocido de la anomalía excéntrica (en este caso, IBF) que representa un tiempo determinado y se traslada dicho ángulo a la recta CH de modo que el ángulo IBF sea igual al ICH. Luego se traza el segmento AH. En el tiempo indicado la posición zodiacal del planeta está dada por el ángulo IAH. Así, el planeta se ubica sobre la línea AH. Sin embargo, la posición correcta no se encuentra en H, puesto que la división de AD en C y la excéntrica centrada en C son falsas, tal como se consideró en los capítulos 19, 20 y 42. La distancia AH es incorrecta [Fig. 11].

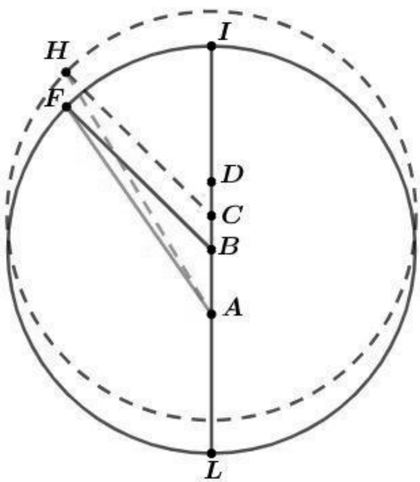

Figura 11.

En el capítulo 45 se asume la bisección de la distancia AD en B de modo que AB = 9282 y se traza, alrededor de B la excéntrica IL con radio igual a CH. Esta excéntrica también es ficticia ya que en el capítulo 44 se había argumentado en favor de una excéntrica ovalada. Sin embargo se divide la excéntrica considerada circular en arcos iguales determinando los puntos F_1, F_2, …, F_n y se trazan por D las paralelas a BF_1, BF_2, …, BF_n. Por cada punto F y con centro en A, se trazan los arcos FG, siendo G la intersección de dicho arco con la paralela a BF por D [Fig. 12]. Así la posición del planeta para cada tiempo dado por IBF, será el punto G. Pero estas posiciones se encuentran más atrasadas con respecto a las encontradas con la hipótesis vicaria [Fig. 13].

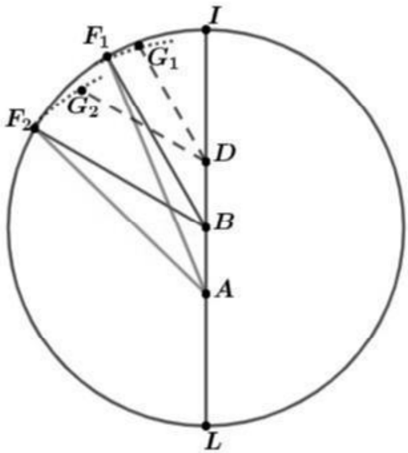

Figura 12.

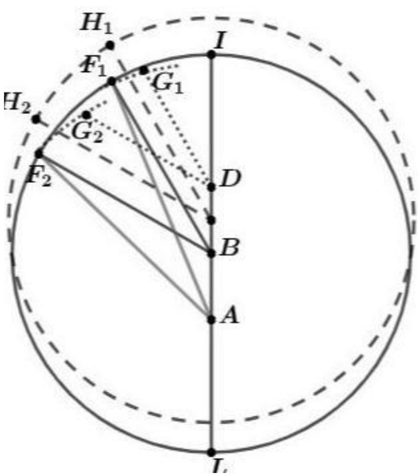

Figura 13.

Las posiciones del planeta están determinadas por los puntos P, intersección entre el arco de centro A y radio AF. Dichos puntos forman un metopoide, una figura ovalada que se acerca al círculo en las cercanías del afelio y se afina hacia el perihelio. Esta configuración responde al hecho de que el planeta en el afelio se encuentra más lejos del Sol y se mueve más lento. A medida que el planeta se mueve hacia el perihelio, se encuentra más influenciado por la fuerza motora del Sol y aumenta su velocidad al tiempo que se acerca a él. El cambio en la velocidad se debe al hecho de que las distancias largas (que exceden al semidiámetro) son más en cantidad y se extienden hasta los 92° 40' de anomalía excéntrica en la cual la distancia del planeta al Sol iguala al radio de la excéntrica. Las distancias cortas son menos en cantidad y están contenidas en un ángulo de 87° 20', en el cual la distancia del planeta al Sol iguala al radio de la excéntrica.

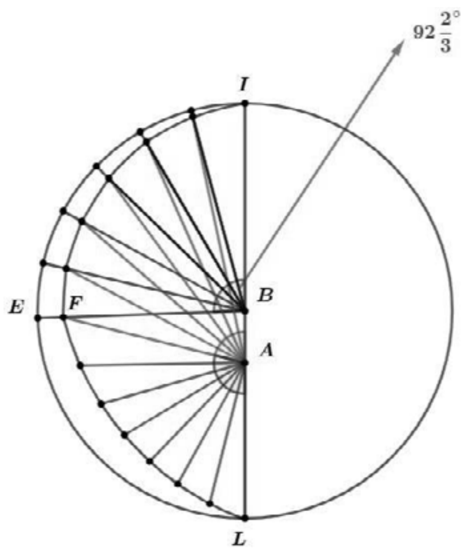

Figura 14.

Sin embargo, el ángulo IAF en el cual se distribuyen las distancias mayores, es menor al FAL en el que se distribuyen las menores. Por lo tanto las primeras, más cercanas al afelio estarán más juntas y las segundas, cercanas al perihelio, más dispersas.

V. Consideraciones finales

Kepler comienza por considerar, para el movimiento de Marte, una órbita circular en concordancia con los antiguos. Una primera aproximación se encuentra en la hipótesis vicaria expuesta en el capítulo 16 de *Astronomía Nova*, pero las distancias al Sol encontradas por este método no se correspondían con las observadas. Sin embargo, los ángulos que determinaban las lineas sobre las cuales se encontraba el planeta resultaban correctos. Más adelante, expone las consideraciones físicas provenientes de la primera aproximación a su teoría magnética de los capítulos 33 a 39. En el capítulo 40 enuncia la ley de las distancias y la ley de las áreas, esta última resulta solo una herramienta para el cálculo, ya que las distancias son infinitas y no pueden sumarse todas. Todos estos resultados le permiten desarrollar, primero la sospecha y luego los argumentos del capítulo 44 que defienden la afirmación de que el planeta se desvía de la órbita circular y, en cambio se mueve describiendo un óvalo. En el capítulo 45 encontró un método para hallar las posiciones del planeta sobre una excéntrica bisecada que le permitió hallar buenos valores para las distancias al Sol, pero sobre ángulos incorrectos.

El objetivo de Kepler era encontrar geométricamente la trayectoria de Marte, pero a partir de las causas físicas del movimiento planetario. Para ello describe los tres caminos que ha recorrido, dos de ellos geométricos que no han logrado resolver el problema. En el tercer intento desafía al método deductivo de la geometría y combina la hipótesis vicaria y aquella ofrecida por el capítulo 45. Así se aseguró de obtener distancias correctas del planeta al Sol sobre los ángulos correspondientes. Con este método no geométrico logró construir la primera aproximación a la órbita de Marte: el metopoide.

Kepler intentó por todos los medios que le fue posible llegar a sus resultados a partir de un método geométrico, pero esto no fue posible y priorizó resolver el problema que lo ocupaba. Así, combinó dos hipótesis falsas para lograr un resultado verdadero. Si bien esto puede parecer una transgresión en su trabajo, no es algo inusual en su obra. En la primera parte de *Astronomía Nova*, Kepler combina dos teorías planetarias rivales: la teoría heliocéntrica de Copérnico y la teoría con punto ecuante de Ptolomeo. Su objetivo final siempre fue llegar a los resultados a partir de las causas físicas de los fenómenos sin perjuicio de servirse de todos los aportes de sus predecesores tomando, de cada uno, aquellas afirmaciones e hipótesis que sirvieran a tal fin.

Referencias

Aiton, E. J. (1975). How Kepler Discovered the Elliptical Orbit. *The Mathematical Gazette*. Vol. 59, pp. 250-260.

Aiton, E. J. (1975). "The elliptical orbit and the area law". *Vistas in Astronomy*. Vol. 18, pp. 573-583.

Donahue, E. J. (1996). "Kepler's Approach to the Oval of 1602, from the Mars Notebook". *Journal for the History of Astronomy*. Vol. 27, pp. 281-295.

Kepler, J. (2015). *The New Astronomy* (W. Donahue, trad.). Santa Fe, New Mexico: Green Lion Press.