Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas[1]

Mónica E. Villarreal

Introducción

En este artículo les propongo pensar acerca del papel de las TICs en la educación matemática, a partir de un constructo teórico que enfatiza el papel de los medios en la producción del conocimiento: la noción de *humanos-con-medios* (Borba; Villarreal, 2005). Cabe aclarar que al hablar de medios me refiero a cualquier tipo de tecnología. Desde este marco, intentaremos esbozar respuestas a dos preguntas: ¿qué aspectos permite comprender en relación a la producción matemática? y ¿qué aspectos permite repensar en términos de prácticas educativas?

Hablar de tecnologías en educación hoy, remite casi de modo natural a computadoras, software multimedia, Internet; sin embargo el concepto de tecnología no está sólo vinculado a desarrollos de equipos sofisticados, va más allá, engloba la totalidad de cosas o construcciones que el ingenio humano consiguió crear en todas las épocas, sus formas de uso, sus aplicaciones (Kenski, 2007, p. 23). Por ejemplo, diversos autores se refieren al lenguaje (oral en su comienzo, escrito más tarde) como una tecnología, una construcción humana que permitió la comunicación entre los miembros de un determinado grupo social. Según Kenski:

> Nuestras actividades cotidianas más comunes – como dormir, comer, trabajar, desplazarnos hacia diferentes lugares, leer, conversar y divertirnos – son posibles gracias a las tecnologías a las que tenemos acceso. Las tecnologías están tan próximas y presentes que no percibimos que no son cosas naturales (2007, p.24).

Y, podríamos agregar, no siempre estuvieron donde hoy los encontramos. Lápiz, cuaderno, lapicera, pizarrón, tiza son productos tecnológicos cuya presencia en la escuela hoy resultan transparentes, sin embargo, no siempre fueron parte de ella. La actividad escolar se fue transformando con el arribo de cada nueva tecnología.

De igual manera, la producción de conocimiento se ve condicionada por los medios utilizados. Tales medios definen las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. Asumimos así que el sujeto epistémico es en realidad un *colectivo constituido por seres humanos-con-medios*. La noción de humanos-con-medios trae dos ideas centrales: por un lado, que la cognición no es una empresa individual, sino social (por eso humanos) y, por otro, que la cognición incluye herramientas, medios con los cuales se produce el conocimiento y este componente del sujeto epistémico no es auxiliar o suplementario, sino esencial. Tan esencial que ese medio es constitutivo del conocimiento, de suerte que si estuviera ausente el conocimiento construido sería otro.

Les propongo mirar un poco hacia atrás con la finalidad de rastrear evidencias que sustenten esa tesis (el medio es constitutivo del conocimiento). Hace ya algún tiempo he comenzado a buscar en la historia de la educación y de la matemática evidencias que muestren que los medios transforman y reorganizan los modos de producir matemática y de educar, afectando la selección de contenidos, la gestión de la clase, las producciones de los estudiantes, etc.

Matemática, medios y arte

El uso de medios en la producción de matemática así como en la educación matemática ha sido, como ya se dijo anteriormente, usualmente tratado como transparente. Por ejemplo, Davis; Hersh (1989) enfatizan que:

> No faltan matemáticos a quienes les agrada pensar que incluso un ser solitario encerrado en un cuarto oscuro podría crear matemáticas, apelando tan sólo a los recursos de un brillante intelecto platónico (1989, p.28).

Estos autores se refieren a los equipos auxiliares o instrumentos necesarios para producir matemática. Afirman que, posiblemente en lejanos tiempos pasados, la matemática primitiva, así como las religiones antiguas o las grandes epopeyas se transmitieron por tradición oral, pero más tarde se tornó evidente la necesidad de instrumentos de escritura, registro y duplicación. Davis; Hersh (1989) van más allá cuando señalan que regla y compás son parte intrínseca de los axiomas que fundamentan la geometría euclidiana y afirman que la geometría euclidiana "podría ser definida como la ciencia de las construcciones con regla y compás" (p. 28).

Es interesante buscar evidencias de los medios utilizados en la producción matemática en dibujos o pinturas. Por ejemplo, miremos con atención en la Figura 1, el fresco llamado *La escuela de Atenas*, realizado por Rafael Sanzio entre los años 1509 y 1512 y que se encuentra en una de las capillas del museo Vaticano.

Figura 1. *La escuela de Atenas* de Rafael Sanzio

Se trata de una de las pinturas más famosas que retrata a filósofos griegos y científicos de la antigüedad, imagen de lo que podríamos llamar un colectivo pensante de humanos-con-medios. De acuerdo a las interpretaciones que críticos e historiadores de arte han realizado (ver por ejemplo el interesante trabajo de Bell, 1995) podemos descubrir la representación de diferentes sabios a partir de los objetos que sostienen o que están utilizando. Por ejemplo, al centro del fresco pueden identificarse las figuras de Platón, a la izquierda, y Aristóteles, a la derecha, gesticulando y dialogando. Ambos sostienen un libro: Platón el *Timeo* y Aristóteles la *Ética* (ver detalles en la Figura 2).

Figura 2. Platón y Aristóteles en *La escuela de Atenas*

A la derecha del fresco descubrimos la figura de Euclides usando un compás para realizar probablemente una construcción geométrica sobre una tabla, rodeado de sus discípulos (ver detalles en la Figura 3). A la izquierda del fresco se reconoce la figura de Pitágoras utilizando una especie de lápiz y sosteniendo un libro mientras estudia su tabla de relaciones armónicas (ver Figura 4).

Figura 3. Euclides, detalle en *La escuela de Atenas*

Figura 4. Pitágoras, detalle en *La escuela de Atenas*

Existen diversas representaciones de Euclides o Pitágoras en cuadros de distintos pintores en los cuales se los ve acompañados de instrumentos que se asocian a las tareas matemáticas que desarrollaban. La figura de Euclides utilizando un compás sobre una tabla se descubre también en un panel de la serie *Hombres famosos*, producida por el pintor flamenco Justus de Ghent (1410-1480) y que data del año 1474. Esta obra, que se reproduce en la Figura 5, se expone en la Galleria Nazionale delle Marche en Urbino (Italia).

Figura 5. Euclides por Justus de Ghent

En la Figura 6 se observan fragmentos del códice de Niccolò de Bologna *Las virtudes y las artes* de 1355 que se expone actualmente en la Biblioteca Ambrosiana de Milán (Italia). Las figuras de Pitágoras a la izquierda y Euclides, a la derecha, representan a la Aritmética y a la Geometría, dos de las siete artes liberales: Gramática, Dialéctica, Retórica, Aritmética, Geometría, Astronomía y Música.

Figura 6. La Aritmética y la Geometría

La Aritmética y la Geometría aparecen también representadas en un manuscrito francés de fines del siglo XIII, que se muestra en la Figura 7.

Figura 7. La Aritmética y la Geometría en un manuscrito del siglo XIII.

Otra evidencia pictórica de los medios que históricamente han sido asociados con la matemática proviene de la obra del pintor barroco italiano Domenico Fetti (1589-1623), *Arquímedes pensativo*, actualmente expuesta en el Museo Alte Meister en Dresden, Alemania (ver Figura 8). Esta pintura de 1620 exhibe una imagen de Arquímedes reflexionando sobre un papel que muestra un dibujo geométrico y rodeado de múltiples útiles: compás, papel, lápiz, libros, una escuadra y un globo terrestre sobre el cual apoya su mano derecha.

Figura 8. *Arquímedes pensativo*

Este breve recorrido por el arte ilustra cómo diferentes instrumentos y útiles han sido históricamente asociados con la producción de conocimiento, particularmente en la matemática. Podemos así reconocer la presencia de los medios como componentes del sujeto epistémico en la matemática de la antigüedad.

Educación y medios

En contextos educacionales, el uso de materiales manipulativos ha sido una recomendación frecuente para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en diferentes épocas. Podemos contar o resolver operaciones aritméticas usando piedritas o fichas, mediante ábacos, contando con los dedos, con lápiz y papel o con una calculadora.

> Cada uno de esos métodos tiene por efecto una distinta percepción de los enteros y una diferente forma de entrar en relación con ellos. Si hoy se protesta que los niños hagan sus operaciones aritméticas con calculadora, quienes lo hacen tienen razón al afirmar que las cosas no serían como cuando se luchaba con la aritmética armados de lápiz y papel. Pero se equivocan al pensar que lo ideal es esa forma de calcular, y que los medios que la reemplazan no son viables (Davis & Hersh, 1989, p. 40).

Ya que hablamos de calculadoras, vale la pena recordar que la primera calculadora de bolsillo aparece en la década del 70. Sin embargo, hasta el día de hoy existen resistencias a aceptar su uso en las aulas. Hay quienes opinan que el empleo de la computadora o la calculadora impide que el alumno razone e indican que antes de utilizarla los alumnos deben primero manejar los contenidos matemáticos. Sin embargo, pocos cuestionarían que un alumno utilice lápiz y papel para resolver un ejercicio matemático, sin percibir, quizás, que su raciocinio y su propia producción matemática están mediados por los dispositivos que emplea para desarrollarlos. Si asumimos que el sujeto epistémico es un colectivo de humanos-con-medios y si afirmamos que el conocimiento que se produce es diferente, entonces es necesario repensar las prácticas educativas.

Quiero contarles una pequeña anécdota. Mi sobrina llega un día con un ejercicio como el siguiente: *Si en tu calculadora no funciona la tecla 9, ¿cómo resolverías la siguiente operación: 5984-1495?* Pensé: qué bien, este es un buen ejercicio para usar la calculadora porque hay que utilizar propiedades de los números. Bien - le dije - sacá la calculadora y ella me respondió: No tía, es para hacer sin la calculadora, y me mostró una gran cantidad de cuentas escritas en el papel. Revisando el libro de texto que utilizaba en la escuela, encontré la ilustración que se muestra en la Figura 9, en la unidad dedicada a "Números primos y compuestos. Factorización".

Figura 9. Ilustración en un libro de texto

La imagen muestra un personaje de aspecto poco inteligente utilizando una calculadora de bolsillo. ¿Cuál es la lectura que se puede hacer de esta ilustración?: ¿el que usa la calculadora es un bruto? o ¿la calculadora no te va a servir para hacer este ejercicio? Personalmente no tomaría este dibujo como una representación inocente. Los dibujos ilustran y, también dicen acerca de la posición de los autores. Vale la pena prestar atención a esos detalles para percibir las posiciones (manifiestas o implícitas) relacionadas con el uso de tecnologías en las clases de matemáticas.

En un documento escrito por Irma Saiz y Nelci Acuña y publicado en el portal educativo del Ministerio de Educación de Argentina (www.educ.ar) podemos leer la siguiente sugerencia relacionada con el uso de calculadoras:

> Problemas como: "¿Cómo se puede multiplicar 20 x 50 = si la tecla del 0 no está funcionando?", o "Si la tecla que no funciona es la del 3, ¿cómo realizar las siguientes cuentas: 39 x 12= o 330 : 50?", pueden ser interesantes para poner en juego relaciones y definiciones de las operaciones fundamentales, y no el mero uso mecánico de la máquina.

Pero, ¿qué ocurre cuando proponemos este tipo de tareas y negamos la posibilidad de usar la calculadora? La esencia de la actividad se pierde y se torna en una tarea tediosa como ocurrió en la situación de la anécdota relatada anteriormente.

Un medio que se caracteriza por su omnipresencia en la escuela es el pizarrón. No podemos imaginar una clase sin pizarrón, pero este dispositivo no siempre estuvo presente en la escuela. Diferentes fuentes indican que el pizarrón fue usado por primera vez en el ámbito educativo alrededor del año 1800. Un instructor norteamericano de la West Point Military Academy (Mr. George Baron) es considerado el primero en usar un pizarrón de pared para enseñar matemática en 1801. Contemporáneamente el director de la Old High School of Edinburgh (Escocia), James Pillans, es también considerado como el inventor del pizarrón y las tizas de colores que habría usado para enseñar geografía. En Francia, desde 1882, el pizarrón era considerado un material de enseñanza que todo maestro debería tener en la escuela primaria, y un dogma de la escuela moderna era: "el mejor profesor es aquel que más usa la tiza" (M.P, 1901, apud Bastos, 2005, p. 136). La llegada y adopción definitiva del pizarrón en las escuelas de América Latina ocurrió hacia fines del siglo XIX (Bastos, 2005) cuando los sistemas de educación pública elemental se estaban consolidando.

El pizarrón en la escuela dio lugar a nuevas prácticas educativas. Previo a su presencia, en las aulas, los estudiantes usaban una pizarrita portátil individual donde escribían sus tareas. El maestro debía ir de un alumno a otro copiando las tareas en cada pizarrita. El uso de este dispositivo significaba que no hubiese un registro permanente de las tareas escolares. De acuerdo con Bastos:

> Se puede afirmar que la centralidad pedagógica de y en el pizarrón resulta de la ausencia de manuales escolares y de otros recursos visuales para el aprendizaje, y de la centralidad del proceso pedagógico en la figura del profesor (2005, p.133).

Una de las principales prácticas que el pizarrón permitió fue la enseñanza simultánea de lectura y escritura para la clase completa. Desde entonces, el pizarrón y el profesor se tornaron los actores centrales en la vida del aula, y copiar del pizarrón fue la principal actividad de los estudiantes.

Las pizarritas individuales eran los únicos dispositivos que los estudiantes usaban en la escuela antes de la llegada del cuaderno, cuando la producción de papel aumentó y los costos disminuyeron. La fecha histórica referida a la llegada de cuadernos a la escuela difiere de un lugar a otro. En Francia, por ejemplo, el uso del cuaderno se tornó común en la escuela secundaria (10 a 14 años) en el siglo XVI, y fue obligatorio en la enseñanza de la caligrafía en el siglo XVII, pero su uso generalizado en la escuela elemental data del primer tercio del siglo XIX (Hébrard, 2001). El costo del papel limitó su uso hasta los grados más avanzados, restringiendo la alfabetización de los niños a la lectura. Hébrard (2001) reporta que alrededor de 1833, el uso del cuaderno en la escuela elemental era considerado por el Ministerio de Instrucción Elemental de Francia un signo de modernidad pedagógica.

En Argentina, el cuaderno fue introducido en las aulas mucho más tarde. Gvirtz (1999) señala que durante la década del 80, en el siglo XIX, se registraron las primeras discusiones respecto del uso del papel en la escuela argentina. Esas discusiones surgieron en una época en que el papel dejaba de ser un lujo debido a su costo y escasez. Por esas causas el aprendizaje de la escritura utilizando el papel estaba reservado inicialmente para los años superiores de la escolaridad. Así se iniciaron las polémicas entre los pedagogos reformistas que proponían el empleo del papel en la escuela y los defensores de la pizarra (tanto del pizarrón de pared como de las pizarritas portátiles que cada alumno poseía). Además de los motivos económicos existían debates en torno al desarrollo de la motricidad fina necesaria para escribir en papel, la cual estaría ausente en los niños pequeños, o las cuestiones de higiene y cuidado en la presentación de los cuadernos escritos en tinta, en los cuales los errores cometidos no podrían ser borrados sin dejar marcas de suciedad, etc. En el marco de esas discusiones, en 1920, el cuaderno llegó a las aulas argentinas, no sin antes haber librado una dura batalla con la pizarrita portátil de nuestros bisabuelos. Cuando los cuadernos arribaron a la escuela, en los pupitres comenzó a haber tinteros que cada mañana eran provistos de tinta por los porteros; las manchas en los delantales blancos de los niños descuidados aumentaron el uso de productos químicos para eliminarlas y la piedra pómez era el medio más eficaz para limpiar las manos entintadas. Posteriormente la invención de las lapiceras esferográficas resolvió algunos de esos problemas. Con la popularización del cuaderno la vida cotidiana dentro y fuera de la escuela cambió. Y tales cambios se extendieron también a la actividad del alumno. La llegada del cuaderno en Argentina estuvo fuertemente vinculada al movimiento de la llamada escuela nueva que recomendaba el uso del cuaderno único de clase como elemento organizador de la labor escolar (Gvirtz, 1999). El cuaderno se constituyó en el registro diario y cronológico de toda la actividad escolar y se transformó también en el nexo entre la escuela y la familia: los padres podían acompañar el progreso de sus hijos a través del cuaderno. Gvirtz (1999) afirma:

> El cuaderno no es un mero soporte físico [...] es, por el contrario, un dispositivo cuya articulación genera efectos: en términos más concretos, el cuaderno constituye, junto con otros elementos, un estructurante de la dinámica del aula (p.160).

En otros términos, su uso no puede ser visto como un simple cambio de tecnología para el registro de las actividades escolares, sino como un reorganizador de la vida en el aula.

Estas breves consideraciones en torno al empleo del pizarrón y la introducción del cuaderno en la escuela tuvieron la intención de mostrar algunas evidencias de transformaciones y reorganizaciones provocadas por los medios más tradicionales presentes hasta hoy en las aulas. Intentemos ahora observar lo que ocurre con la llegada de las nuevas TICs al contexto educacional. De los aspectos relacionados con la llegada del cuaderno a la escuela, quisiera resaltar dos de ellos a fin de realizar una comparación con el arribo de las computadoras a ese mismo ámbito. El cuaderno llega cuando el costo del papel se torna accesible y de la mano de una reforma curricular. En relación con la computadora puede decirse que ocurrió lo mismo en el aspecto económico, aunque no se produjeron reformas curriculares sistemáticas que integraran su uso en las actividades propias de cada disciplina escolar a fin de optimizar su potencialidad educativa. Los cuadernos eran extraños en las escuelas de comienzos del siglo XX, de modo similar, las computadoras están ausentes en muchos entornos educacionales aún en el siglo XXI. La introducción y uso de computadoras o nuevas TICs en ambientes educativos han sido extensamente discutidos e investigados en educación matemática, y si bien muchos autores han reportado acerca de sus beneficios, todavía encontramos posiciones dicotómicas entre matemáticos y educadores.

Centrados en el ambiente escolar, Ponte (2000) plantea las siguientes preguntas en relación con la llegada de nuevas TICs al aula:

> … ¿de qué modo las nuevas tecnologías alteran (o pueden alterar) la naturaleza de los objetivos educacionales planteados por la escuela?... ¿de qué modo alteran las relaciones entre los alumnos y el saber?... ¿de qué modo alteran las relaciones entre alumnos y profesores?... ¿de qué modo alteran el modo como los profesores viven su profesión?... ¿El surgimiento de la sociedad de la información requiere de una nueva pedagogía? (p.71).

Autores como Seymour Papert son categóricos al afirmar:

> Por lo tanto, lo que se requiere es un cambio profundo en cómo pensar acerca de la educación. Así, la tecnología no es la solución, es sólo la herramienta. Pero mientras la tecnología no produce automáticamente una buena educación, la falta de tecnología garantiza automáticamente una mala educación (2001, p. 2).

Podemos preguntarnos en qué sentido está dicha esta afirmación. Creo que la respuesta tiene que ver con el sentido de una educación sin tecnología en una sociedad altamente tecnológica. También puede pensarse que esta sentencia tiene sentido solo en países del primer mundo donde el acceso a medios informáticos es mayor. Sin embargo, aunque las TICs lleguen a la escuela de manera tardía y produzcan posiciones dicotómicas, parto de dos premisas básicas: 1) el acceso a las TICs debe ser entendido como un derecho. 2) Es necesario que los alumnos tengan una "alfabetización tecnológica" en las escuelas, integrando dicha tecnología en actividades esenciales tales como: leer, escribir, comprender textos, interpretar gráficos, contar, desarrollar nociones espaciales, etc. Estas premisas son enfatizadas en Borba y Penteado (2001) quienes afirman:

> ... el acceso a la informática en la educación debe ser visto no sólo como un derecho, sino como parte de un proyecto colectivo que prevé la democratización de accesos a tecnologías desarrolladas por esa misma sociedad. Es de estas dos formas que la informática en la educación debe ser justificada: alfabetización tecnológica y derecho al acceso (p. 17).

En este marco busco comprender los escenarios educativos de los cuales la tecnología es parte, sin compararlos con los escenarios tradicionales, sino intentando mostrar evidencias de una reorganización del pensamiento matemático, de la actividad del estudiante, del papel del profesor, de la gestión del aula, de los propios contenidos y su organización curricular cuando se asume la noción de humanos-con-medios como sujeto epistémico.

Algunos antecedentes teóricos

En este punto quiero traer algunos antecedentes teóricos vinculados con la visión epistemológica presentada, según la cual quien conoce, quien construye o produce conocimiento no es un individuo aislado, sino que la producción de conocimiento está mediada por las tecnologías, que el conocimiento se produce con las tecnologías. Pierre Lévy, sociólogo francés, en su libro *Tecnologías de la inteligencia*, afirma: "*… nuestro pensamiento se encuentra profundamente moldeado por dispositivos materiales y colectivos sociotécnicos*" (1993, p. 10).

Los dispositivos materiales (lápiz y papel, computadoras, calculadoras, etc.) son parte de un colectivo pensante y están relacionados con las tecnologías intelectuales descriptas por Lévy (1993): la **oralidad**, la **escritura** y la **informática**. Tecnologías que condicionan las formas de pensamiento de una sociedad, permiten la instauración de nuevos estilos cognitivos y la modificación de las normas del saber.

En las sociedades orales primarias, las narrativas y los ritos son parte de las formas canónicas del saber, como géneros de organización de las representaciones que posibilitan la transmisión de conocimientos de forma duradera. Las culturas orales se constituyen en una ecología cognitiva compuesta esencialmente por memorias humanas, donde la repetición periódica en voz alta de las proposiciones son necesarias para evitar su desaparición, ya que no existen modos de almacenar las representaciones verbales para su reutilización en el futuro. El colectivo humano era uno solo con la memoria. La oralidad primaria persiste en las sociedades modernas. Tradiciones, conocimientos empíricos, formas de ser, se transmiten por canales diferentes de lo impreso o de los medios de comunicación audiovisual. La oralidad sobrevive, también, como un medio de la escritura, cuando interpretaciones orales son necesarias, en la organización de libros en forma de diálogos, etc.

El surgimiento de la escritura genera una situación de comunicación nueva: los discursos pueden ser separados de las circunstancias particulares en que fueron generados, el receptor se separa del emisor; la mediación humana, característica de las sociedades orales, es eliminada. Al mismo tiempo, la rigidez de un mensaje escrito puede volverlo oscuro para el lector y el proceso de atribución de sentido, la hermenéutica, pasa a ser central en la comunicación. La escritura suscitó, también, la aparición de las teorías, "saberes cuyos autores generalmente pretendieron que fuesen independientes de las situaciones singulares en que fueron elaborados y utilizados" (Lévy, 1993, p. 90), esto es, con pretensión de universalidad. La narrativa y el rito como técnicas mnemotécnicas, modos de transmisión y organización de los conocimientos en el tiempo de la oralidad primaria, son substituidos por la escritura que permite una conservación y transmisión más cómoda y una organización modular y sistemática de los conocimientos. La presentación sistemática de una materia, siguiendo un método de exposición analítico, fue favorecida por la imprenta y sus interfaces específicas: paginación, sumario, índice, uso de tablas, esquemas y diagramas, etc. La invención de Gutemberg (siglo XV) permitió que un nuevo estilo cognitivo se instaurase. La inspección de mapas, de esquemas, de gráficos, de tablas, de diccionarios se encuentra a partir de entonces en el centro de la actividad científica. La memoria humana, central en las sociedades orales, se transforma con la escritura en una memoria objetiva, muerta e impersonal. Esa objetivación de la memoria separa el conocimiento de la identidad personal o colectiva y lo vuelve susceptible de ser analizado y examinado, surgiendo, entonces, la preocupación con la verdad.

Considerando, finalmente, la informática como un nuevo tiempo del espíritu, Lévy (1993) afirma que el conocimiento por simulación es uno de los nuevos géneros de saber que la ecología cognitiva informatizada transporta, diferente del conocimiento de tipo hermenéutico y teórico, propio de las sociedades con escritura. Las teorías, características de las sociedades con escritura, ceden terreno a los modelos en la cultura informática, difícilmente definitivos, siempre corregibles y perfectibles a lo largo de las simulaciones. Un modelo no es verdadero o falso, apenas será más o menos eficaz en relación con algún objetivo específico. La verdad objetiva y crítica como norma para el conocimiento surge en la sociedad de la escritura, pero las condiciones que sustentan esa norma se están transformando rápidamente. El conocimiento por simulación es menos absoluto que el conocimiento teórico, más operatorio y más vinculado a las circunstancias de uso. Mientras la teoría es una forma de presentación del saber, un modo de comunicación o de persuasión, la simulación corresponde a "etapas de la actividad intelectual anteriores a la exposición racional: la imaginación, el bricolage mental, ensayos y errores" (p. 124) y también la experimentación.

La aparición de nuevas tecnologías intelectuales suscita cambios en las ecologías cognitivas activando formas de conocimiento diferentes, expandiendo formas de saber que estuvieron relegadas, o debilitando otras. Es claro que la oralidad y la escritura continúan siendo las tecnologías intelectuales más comunes en el trabajo matemático de los estudiantes. El abordaje algebraico de cuestiones matemáticas es característico de la cultura de la escritura, soporte fundamental para tales resoluciones. Este aspecto ya fue destacado en diferentes artículos, que indican la influencia de los dispositivos tradicionales, lápiz y papel, en el estilo de producción matemática que enfatiza el conocimiento de un fenómeno dado principalmente a través del álgebra (Borba, 1995). En este sentido puede decirse que los dispositivos impregnan la Matemática y el pensamiento de quien hace y aprende Matemática.

Otro autor que se constituyó en fuente de inspiración para la noción humanos-con-medios fue el psicólogo ruso Tikhomirov (1981), quien analiza el papel de la computadora y su relación con la actividad humana bajo una perspectiva psicológica. Señala que es esencial comprender su papel de mediadora en la actividad humana como generadora de un estadio del pensamiento cualitativamente diferente. El autor presenta tres visiones que caracterizan la relación “ser humano-computadora” de modos diferentes: la teoría de **substitución**, la teoría de **suplementación** y la de la **reorganización**.

Según la teoría de substitución, la computadora substituye al ser humano en todas las esferas del trabajo intelectual. Esta visión está basada principalmente en la suposición de que la computadora también puede resolver problemas que el ser humano resuelve. En la teoría de suplementación, la computadora es vista como un suplemento del pensamiento humano, que incrementa el volumen y la velocidad del procesamiento humano de información. En este sentido, la computadora no estaría mediando la actividad humana, sino simplemente se restringiría a ser una extensión cuantitativa de la misma. Una tercera teoría, que muestra la posición del propio autor, es la de la reorganización. Según ella, la estructura de la actividad intelectual humana es modificada por el uso de la computadora, su mediación reorganiza los procesos de creación, de búsqueda y almacenamiento de información y el establecimiento de relaciones humanas. Para Tikhomirov es la constitución de sistemas “ser humano-computadora” lo que resulta en una verdadera reorganización de la actividad humana, transformando la computadora en mucho más que en una herramienta de auxilio en la actividad, en una herramienta que transforma esa actividad.

Con base en los constructos de estos dos autores es que nace la expresión humanos-con-medios. Si asumimos entonces que el conocimiento es una construcción colectiva de humanos-con-medios y siendo las TICs los nuevos medios que se hacen presentes en el ambiente educativo, podemos preguntarnos: ¿cuáles son los abordajes pedagógicos que creemos están en sinergia con esta presencia? Existen varios abordajes pedagógicos desarrollados y estudiados en diferentes escenarios (de clases o de investigación) que están en sinergia con la manera en que entendemos el papel de las TICs en la construcción de conocimientos matemáticos. A continuación, presento de manera sintética, una serie de ejemplos que muestran algunos de esos abordajes en acción y que al mismo tiempo nos permitirán ver qué características tiene la producción matemática de los estudiantes en ambientes educativos donde la tecnología está presente.

Ejemplo 1: conjeturas con parábolas

Este ejemplo[2] muestra el trabajo desarrollado en un curso de Matemática para estudiantes de Biología en la Universidad Estadual Paulista (Río Claro - Brasil) en el cual se trabajaba en grupos con actividades utilizando calculadoras gráficas. Esta modalidad de trabajo era denominado por el profesor del curso abordaje experimental-con-calculadora gráfica. Las actividades propuestas eran de carácter abierto de modo tal que fuese posible experimentar para elaborar conjeturas que luego eran probadas o refutadas. Una de las actividades propuesta fue la siguiente: "¿Qué alteraciones ocurren en el gráfico de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, cuando sus parámetros son variados?".

Luego de realizar varios gráficos en la calculadora gráfica, un grupo mostró algunos gráficos como los de la Figura 10 y planteó la siguiente conjetura:

> Cuando "b" es mayor que cero, la parábola va a cortar el eje y con su parte creciente. Cuando el "b" sea menor que cero, va a cortar al [eje] y con su parte decreciente

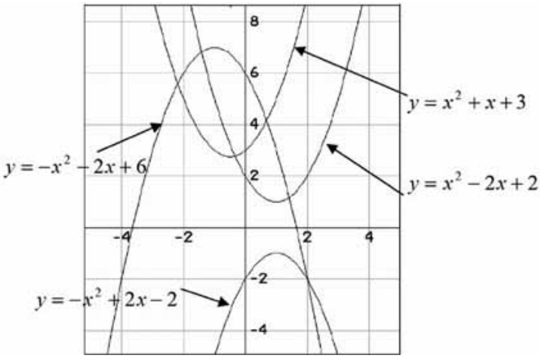

Figura 10. Algunos gráficos que ejemplifican la conjetura

Otro grupo formuló discusiones sobre cómo el vértice de la parábola se altera cuando el coeficiente "*b*" varía, mientras "*a*" y "*c*" se mantienen fijos, observando que se produce un movimiento del vértice de la parábola que puede ser descripto por otra parábola: $y=-ax^2+c$. En la Figura 11, por ejemplo, se muestran parábolas de la forma $y=x^2+bx+3$ y la parábola $y=-x^2+3$ que pasa por los vértices de esa familia de parábolas. La ecuación de esta última parábola fue obtenida por algunos estudiantes a través de ensayo y error pero una invitación posterior del profesor llevó a los estudiantes a justificar la veracidad de esa conclusión a partir de un trabajo más algebraico.

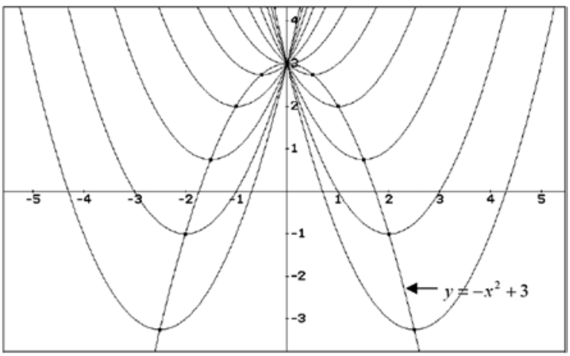

Figura 11. La parábola $y=-x^2+3$ pasa por los vértices de parábolas de la forma $y=x^2+bx+3$

A partir del trabajo desarrollado por los estudiantes con las calculadoras gráficas fue posible la generación de conjeturas y un posterior proceso de justificación matemático. Un particular colectivo pensante, constituido por estudiantes-con-calculadoras gráficas, elaboró conjeturas originales acerca de los efectos gráficos de los parámetros de una ecuación cuadrática, en el marco de un escenario exploratorio promovido a partir de una actividad simple pero abierta.

Ejemplo 2: conjeturas con circunferencias

El siguiente ejemplo[3] proviene de un experimento de enseñanza (Steffe; Thompson, 2000) desarrollado con seis estudiantes, voluntarias, del Profesorado en Matemática, que cursaban Análisis Matemático I en la Universidad Nacional de La Pampa (Etcheverry et *al.*, 2004). Se encontraban estudiando gráficos de cónicas, analizando los cambios en las representaciones gráficas de la expresión algebraica $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ a partir de la variación de sus parámetros. La experiencia se desarrolló en un ambiente provisto de computadoras con un software gráfico. La actividad propuesta fue la siguiente: "Investigar de qué forma se modifican los gráficos de las circunferencias correspondientes, al variar el parámetro C en la ecuación $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$".

Haciendo uso de un comando del programa que permite construir una familia de curvas, Ana asignó a C valores enteros entre -10 y 10, generando entonces 21 ecuaciones diferentes que posteriormente fueron graficadas. La computadora realizó los gráficos que muestra la Figura 12.

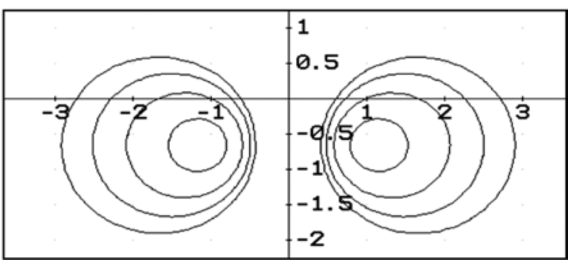

Figura 12. Gráficos de $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ asignando a C valores enteros entre -10 y 10

Inmediatamente Ana advirtió que faltaban algunos gráficos, ya que solo había 8 circunferencias. Entonces, se abocó a trabajar con lápiz, papel y calculadora, obteniendo, para cada valor de *C*, la expresión canónica que le permitió decidir cuáles ecuaciones correspondían a la de una circunferencia y cuáles no. Esta tarea le resultó muy trabajosa y finalmente presentó los datos en una tabla como la que se muestra a continuación:

C	R2	R	Centro
10	1,55	1,24	$\left(-\frac{15}{9},-\frac{2}{3}\right)$
9	1,03	1,01	$\left(-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}\right)$
8	5/9	0,74	$\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$
7	0,139	0,37	$\left(-\frac{7}{6},-\frac{2}{3}\right)$
6	-2/9	no existe	---
5	-0,53	no existe	---
⋮	⋮	⋮	⋮

Después de realizar este análisis, otra estudiante, Laura, concluye: "Para valores de *C* entre -10 y -7 y entre 7 y 10 existe circunferencia, pero para los valores restantes no; por eso en la gráfica sólo aparecen ocho circunferencias".

Cabe notar que el empleo de la forma canónica de la circunferencia para el caso considerado, $\left(x+\frac{C}{6}\right)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{C^2-44}{36}$, permite verificar por qué ocurre esto. La situación antes relatada motivó a Florencia a variar los valores del coeficiente *C*, asignándole algunos valores enteros entre -50 y 50. Ella observa los gráficos que muestra la computadora y con la utilización del *zoom* (ver Figura 13), comando que permite ver más en detalle los gráficos obtenidos, llega a la siguiente conclusión: "Para cualquier valor de *C* nunca va a tocar al eje de las ordenadas, se acerca cada vez más al eje pero no lo toca".

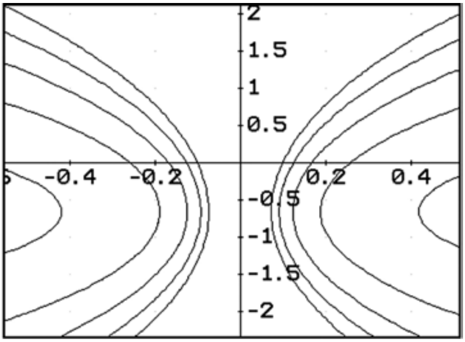

Figura 13. Gráficos de $3x^2 + 3y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ asignando a C valores enteros entre -50 y 50

Esta conclusión es verdadera pero no fue demostrada en ese momento. Posteriormente, se les propuso que variaran el coeficiente A en la ecuación $Ax^2 + Ay^2 + Cx + 4y + 5 = 0$. Nancy elige para A los valores 4, luego 1 y después 0,9 y afirma que al variar el coeficiente cuadrático en todos los casos, las circunferencias obtenidas no cortan el eje de las ordenadas. Mientras tanto, Laura, que ha estado trabajando con la ecuación $0{,}2x^2 + 0{,}2y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$, muestra los gráficos en la Figura 14 y dice: "Cuando grafico la ecuación $0.2x^2 + 0.2y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$, las circunferencias cortan al eje en dos puntos".

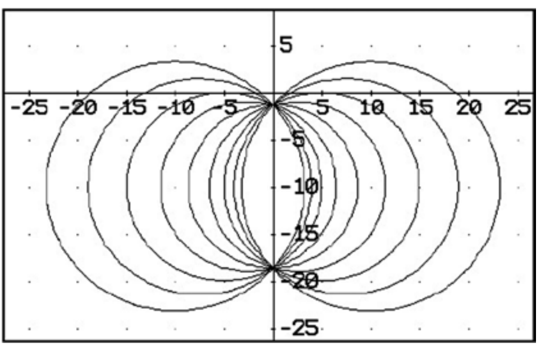

Figura 14. Gráficos de $0{,}2x^2 + 0{,}2y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$

Laura propone entonces buscar un valor para el parámetro A de modo tal que sus gráficos resulten circunferencias tangentes al eje de las ordenadas. Todas las estudiantes se abocaron a la tarea de variar el coeficiente A en la ecuación $Ax^2 + Ay^2 + Cx + 4y + 5 = 0$ asignándole valores entre 0,2 y 0,9. Este intervalo no fue elegido arbitrariamente sino sobre la base de lo observado con los gráficos anteriores: con A = 0,2 las circunferencias cortan al eje de ordenadas y con A = 0,9 los gráficos no cortan a dicho eje. Finalmente, a partir de ensayo y error logran visualizar que para el valor *A=0,8* se obtienen gráficos aparentemente tangentes al eje de las ordenadas (ver Figura 15).

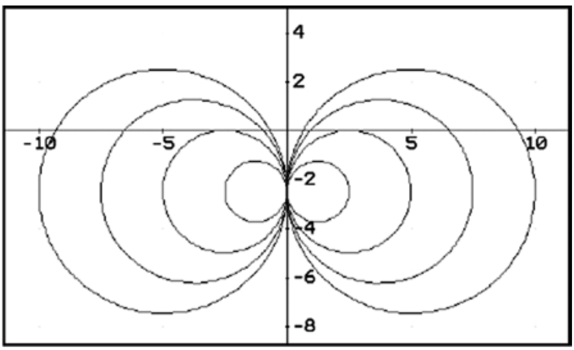

Figura 15. Gráficos de $0{,}8x^2 + 0{,}8y^2 + Cx + 4y + 5 = 0$

El docente preguntó si realmente estaban convencidas de que estos gráficos fueran tangentes y cómo se podría justificar ese hecho que visualmente parecía verdadero. Laura responde: "Usé el *zoom* para asegurarme de que las circunferencias son tangentes. Pero puedo resolver las ecuaciones para encontrar el punto de tangencia".

Laura recurre inicialmente a una justificación computacional visual (uso del *zoom*) y posteriormente indica que también podría realizar una resolución algebraica, resolviendo ecuaciones. Otras estudiantes demuestran su asombro y manifiestan la necesidad de una mejor justificación:

–Nancy: ¡Yo podría haber estado toda la tarde y no se me hubiese ocurrido darle el valor 0,8!

–Florencia: Debe haber una explicación de por qué ocurre para A=0,8.

Frente a esta inquietud fue necesario realizar deducciones algebraicas para justificar la conjetura. Con la ayuda de la profesora, Florencia trabajó en tal deducción. La estudiante afirmó que el punto donde las circunferencias cortan al eje y sería de la forma (0, y). Así, para x=0, la ecuación cuadrática quedaría $Ay^2+4y+5=0$. La profesora sugirió resolver esa ecuación cuadrática y la estudiante escribió, entonces, las soluciones $y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4A5}}{2A}$. Ya que se busca que el corte con el eje y sea único, se impone la condición $4^2-4A5=0$, obteniéndose A=0,8.

En este encuentro se pudo concluir que las circunferencias $3x^2+3y^2+Cx+4y+5=0$ nunca cortan al eje y, y que hay restricciones sobre C para que exista gráfico (las estudiantes encontraron $|C|\geq 7$). También pudo observarse que las circunferencias de ecuaciones $Ax^2+Ay^2+Cx+4y+5=0$ cortan al eje y en solo un punto si A=0,8. Siguiendo con el análisis iniciado por Florencia, con la ayuda de la profesora, también se puede ver, que las circunferencias $Ax^2+Ay^2+Cx+4y+5=0$ cortarán al eje y en dos puntos si $A<0,8$ y no lo cortarán si $A>0,8$.

Al trabajar en un ambiente computacional con abordajes no tradicionales, con el planteo de problemas más abiertos que admiten diversas estrategias para su resolución, con intervenciones del profesor como guía y auxilio y dejando que los estudiantes sigan sus propios caminos de exploración, dos procesos son favorecidos: la visualización y la experimentación. El uso del comando *zoom* como recurso y el empleo de casos particulares para verificar conjeturas, son estrategias comunes en varios niveles educativos y han aparecido en el ejemplo de las parábolas o en el de las circunferencias. Ambos ejemplos muestran cómo diferentes conjeturas matemáticas fueron visualmente generadas. Algunas de ellas fueron probadas y otras fueron aceptadas sin prueba alguna. La computadora fue el medio con el cual los estudiantes crearon y "probaron visualmente" sus suposiciones. La pregunta parece ser: ¿para quién (qué audiencia) y en qué casos (qué tareas particulares) es necesaria una prueba matemática? Creo que los ejemplos anteriores nos permiten pensar acerca del lugar de las pruebas en un abordaje experimental-con-tecnologías. En un ensayo muy interesante, Thurston (1994) reflexiona acerca de la prueba en matemática y, hablando desde su propia experiencia como matemático, expresa:

> "Se vuelve notablemente claro cuánto las pruebas dependen de la audiencia. Probamos cosas en un contexto social y las enfatizamos para una cierta audiencia (p. 175)".

Continúa diciendo que una prueba que puede ser comunicada en dos minutos a los topólogos, necesitaría una hora para que los analistas la entendieran (o viceversa). Thurston estaba hablando de la audiencia de matemáticos, pero su ensayo de algún modo nos inspiró: en el particular contexto de aprendizaje de nuestros estudiantes, ellos crearon criterios particulares de validez y verdad que pueden incluir argumentación gráfica, o comandos de la computadora como medios para probar sus conjeturas. Esto no significa que el profesor, como un miembro del colectivo pensante del aula, no llame la atención hacia las pruebas matemáticas.

Ejemplo 3: representaciones visuales múltiples y coordinación entre medios

El tercer ejemplo proviene de una investigación desarrollada por Scheffer (2001) quien trabajó con nociones de movimiento en la enseñanza básica a través del uso de sensores de movimiento acoplados a una calculadora gráfica. La actividad que a continuación describo fue desarrollada en el contexto de un experimento de enseñanza (Steffe; Thompson, 2000) con dos estudiantes de octavo año de una escuela primaria en Brasil. Rafael (15 años) y Queila (14 años) utilizaron un CBR[4], detector de movimiento (sensor) unido a una calculadora gráfica que proporciona gráficos de distancia vs. tiempo mientras se ejecutan movimientos en tiempo real (ver Figura 16). Los estudiantes ya habían trabajado anteriormente con este dispositivo en la escuela.

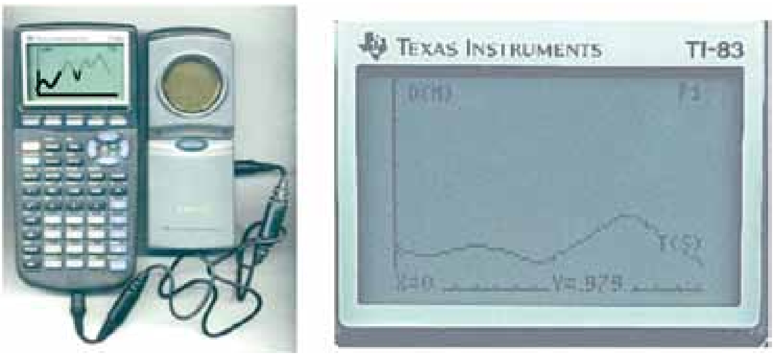

Figura 16. Calculadora gráfica acoplada a un CBR (izquierda). Gráfico en la pantalla de la calculadora generado a partir de los datos del sensor (derecha)

La tarea que se propuso a los estudiantes fue realizar cualquier movimiento con el sensor en la mano y predecir cual sería el gráfico de distancia vs. tiempo que aparecería en la pantalla de la calculadora gráfica. El objetivo de la tarea era relacionar un movimiento físico con el gráfico cartesiano que aparece en la pantalla de la calculadora gráfica. Una vez comprendida la consigna, Rafael toma el sensor en sus manos y lo apunta hacia la pared, en este caso el sensor irá midiendo la distancia entre Rafael y la pared. Posteriormente realiza el siguiente movimiento: camina hacia la pared, se detiene por un momento inmediatamente antes de llegar a la pared y finalmente camina hacia atrás con el sensor apuntado hacia la pared. Rafael realiza en el pizarrón un gráfico distancia vs. tiempo que, según él, representaría el movimiento que había realizado. La Figura 17 muestra el gráfico de Rafael.

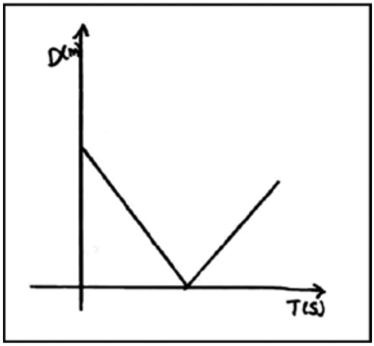

Figura 17. El gráfico de Rafael

A partir de este gráfico, se produce el siguiente diálogo entre la investigadora (a quien identificaremos con E -entrevistadora), Rafael (R) y Queila (Q):

E: ¿Tocó la pared?

R: Casi, llegué cerca, no, y después yo hice … como eso pienso [se refiere al dibujo en el pizarrón]

E: Mmm. ¿Estás de acuerdo? [dirigiéndose a Queila]

Q: Bueno, por lo que él dice, estoy de acuerdo.

E: Mmm. Así que, llegaste cerca – empezaste lejos, te acercaste y después volviste.

R: Sí, volví al lugar desde donde había empezado.

Q: Yo marcaría una pausa aquí, ¿sí? Porque se paró ahí.

E: ¡Ah! Hay una pausa perdida. Andá al pizarrón y dibuja cómo te parece que sería con la pausa. Hacelo con otro color, tomá la tiza naranja.

Queila dibuja en el pizarrón la línea de trazo discontinuo que aparece en la Figura 18 y Rafael concuerda en que él había olvidado representar la pausa en su movimiento realizada inmediatamente antes de llegar a la pared.

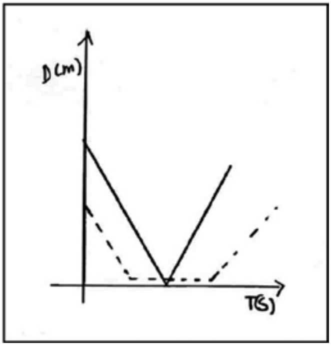

Figura 18. El gráfico de Queila en trazo discontinuo

Una vez que hay acuerdo en lo referido a la manera de representar la detención de Rafael inmediatamente antes de comenzar a retroceder, la entrevistadora muestra a los estudiantes el gráfico generado por la calculadora (Figura 19) y se produce el diálogo que sigue:

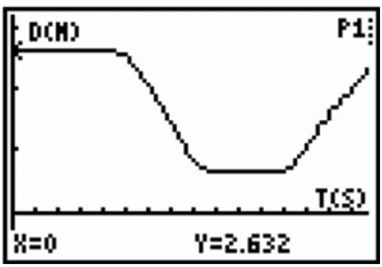

Figura 19. El gráfico distancia vs. tiempo en la calculadora

R: Salió realmente diferente de la que está en el pizarrón [se refiere al gráfico en forma de V].
Q: No salió tan diferente [se refiere a su gráfico de trazo discontinuo].
R: No, el de ella es el mismo.
E: Pero, ¿entendiste la idea, no Rafael? Porque vos… te acercaste y después te alejaste

Q: Él se movió, ¿correcto?
E: Mmm.
Q: Se acercó, ¿sí?
E: Sí.
Q: Llegó allá y se paró. Entonces yo pensé que debería tener esta pausa, porque después volvió, ¿sí?
E: Mmm.
Q: Se estaba volviendo. Entonces, llegó allá, se acercó, hubo una pausa, cuando hubo una línea [se refiere a la parte constante en el gráfico] y volvió. Se volvió, ¿sí? Me parece que sería así.

La entrevistadora junto con los estudiantes analizan el gráfico realizado por la calculadora gráfica y lo comparan con los gráficos del pizarrón. Se observa que la constante que aparece al comienzo del gráfico se debe a que el sensor ya estaba funcionando antes de que Rafael iniciara el movimiento. Posteriormente, identifican en el gráfico los distintos momentos del movimiento: la primera constante corresponde a los instantes previos a que Rafael comenzara a caminar hacia la pared, el intervalo en el cual el gráfico es decreciente corresponde al acercamiento de Rafael hacia la pared, la constante que sigue representa la pausa antes de llegar a la pared y el intervalo de crecimiento final corresponde al alejamiento.

Este episodio ilustra el modo en que se coordinaron diferentes representaciones. Primero los estudiantes se ponen de acuerdo acerca de cuál es el gráfico del pizarrón que mejor representa el movimiento de Rafael. Después tienen que coordinar la experiencia del movimiento corporal realizado y el gráfico generado por la calculadora mientras Rafael caminaba. El episodio enfatiza cómo el movimiento del cuerpo fue coordinado con la representación cartesiana. La pausa en el movimiento fue una dificultad, al trabajar con el gráfico cartesiano. Había una discrepancia: mientras Rafael estaba parado la línea en la calculadora seguía moviéndose. Coordinar la experiencia física de estar detenido con la línea continua y dinámica del gráfico cartesiano que iba apareciendo en la pantalla de la calculadora no es una tarea trivial.

La mayor parte de la investigación desarrollada en torno a representaciones matemáticas y la coordinación de representaciones múltiples específicamente se refieren usualmente a representaciones numéricas, algebraicas y gráficas. Pero la discusión adquiere nuevas dimensiones cuando las representaciones son asociadas con los medios que las producen o cuando movimientos corporales entran en consideración. Esta perspectiva pone de manifiesto la necesidad de coordinación entre medios y amplía las posibilidades de visualización ya que las imágenes kinestésicas pasan a extender el repertorio de imágenes relacionadas con conceptos matemáticos.

Quiero destacar también que el episodio presenta un abordaje visual para la introducción de funciones que "puentea" al álgebra, mostrando que la generación de funciones no depende de la existencia previa de una expresión algebraica. La generación de una función definida por partes emerge naturalmente cuando miramos el gráfico producido por la calculadora gráfica y la discusión acerca de cómo generar una expresión algebraica para ese gráfico también se ve favorecida por este entorno.

Ejemplo 4: obteniendo un modelo

Este último ejemplo pretende mostrar el modo en que un grupo de estudiantes resuelven un problema en el contexto de un curso de modelización. Dicho curso, extracurricular, estaba destinado para estudiantes de Ingeniería Agronómica de la Universidad de Córdoba que se desempeñaban como ayudantes-alumnos de Matemática, materia correspondiente al primer año de la mencionada carrera (ver detalles en Villarreal; Bazán, 2006). El siguiente enunciado formaba parte de una serie de ejercicios y problemas que los estudiantes estaban resolviendo:

Si una planta mide, al comenzar un experimento, 30 cm y cada mes su altura aumenta un 50% de la altura del mes anterior. Genere un modelo matemático que le permita predecir la altura de la planta en cualquier tiempo t.

Este problema presenta una situación irreal en la cual una planta crece indefinidamente y conduce al planteo del modelo exponencial $h(x) = 30 \cdot (1{,}5)^x$, donde x representa el tiempo en meses y h(x) la altura en el mes x. En una primera instancia los estudiantes proponen una función que escriben como $h(x) = 30 + \cdots$, acotando que podría tener un comportamiento logarítmico y realizando un gráfico como el de la Figura 20. Luego de realizar esta conjetura indican que "Una logarítmica no cortaría al eje y, tiene un comportamiento logarítmico pero no va a ser una logarítmica neta", refiriéndose a que la función buscada no podría ser de la forma $y = \log_a x$, ya que la misma no corta al eje y.

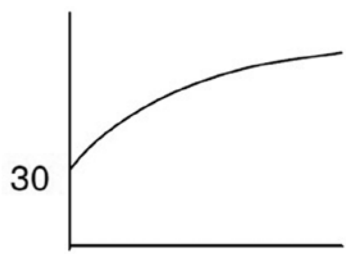

Figura 20. Un gráfico propuesto por los estudiantes

Luego se abocan a un análisis algebraico para intentar encontrar la expresión funcional para *h(x)* y expresan: "En realidad si pongo x más 50% de *x*, *x* varía para el tiempo que viene"[5]. Esta afirmación indica que estarían pensando en una forma recursiva para determinar la altura de la planta. Después de algunas discusiones, realizan cálculos numéricos, determinando la altura de la planta para los primeros meses 45 cm, 67,5 cm, 101,25 cm para el primer, segundo y tercer mes respectivamente. Posteriormente concluyen que una fórmula general para calcular la altura de la planta en el mes *x*, sería:

$$h(x) = h_{(x-1)} + \frac{h_{(x-1)}}{2}$$

$$h(x) = 1{,}5 \cdot h_{(x-1)}$$

donde $h_{(x-1)}$ representa la altura de la planta en el mes anterior a "*x*" y $h_{(x-1)}/2$ es el 50% de la altura en el mes anterior a "*x*". Los alumnos tenían computadoras a su disposición y deciden utilizar el software *Graphmatica*[6] para graficar los puntos que habían calculado anteriormente (ver Figura 21).

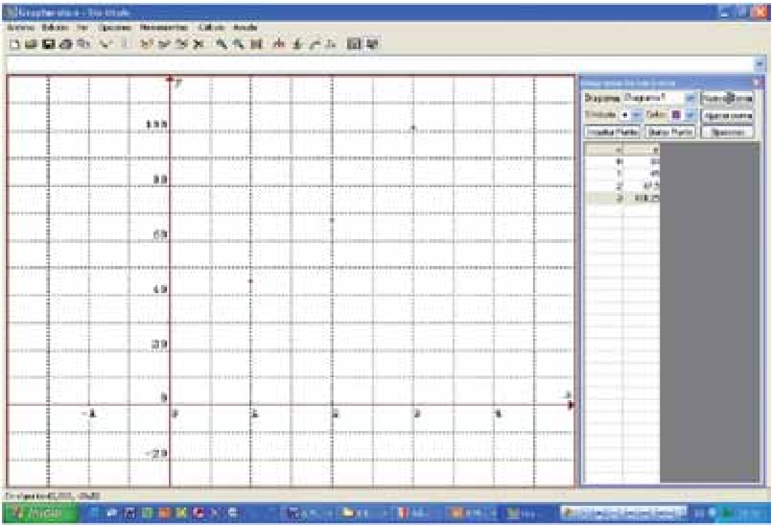

Figura 21. Puntos en un gráfico altura vs. tiempo utilizando *Graphmatica*

A partir de la visualización del gráfico, uno de los estudiantes indica que podría tratarse de una función exponencial ya que los puntos no parecen alineados. Otro de ellos afirma que para calcular valores de la altura de la planta para meses sucesivos, usando la calculadora, es necesario "sólo apretar siempre por 1,5", refiriéndose a que la altura de la planta, en cada mes, se obtiene multiplicando la del mes anterior por 1,5. Cabe destacar aquí que al percibir, a partir del uso de la calculadora, cómo calcular la altura de la planta para el próximo mes se observa en acción un sistema estudiantes-con-calculadora que descubre un patrón funcional de comportamiento. Este patrón les permitió finalmente llegar a la fórmula:

$$h(x) = (1{,}5)^x \cdot 30$$

Posteriormente, los alumnos usaron un comando del software *Graphmatica* para ajustar una curva a los puntos que ya habían ingresado y graficado. El resultado de tal ajuste aparece en la computadora escrito de la siguiente manera:

$$y = e^{(0{,}4055 \cdot x + 3{,}4)} = e^{0{,}4055 \cdot x} \cdot e^{3{,}4}$$

Los estudiantes comprueban que esta expresión es equivalente a la que ellos habían obtenido: $h(x) = (1{,}5)^x \cdot 30$ ya que $e^{3{,}4} \cong 30$ y $e^{0{,}4055} \cong 1{,}5$. Finalmente discuten acerca de la factibilidad de este modelo e indican: “Falta tener en cuenta otros factores, no se dice que planta es”, “No se ajusta a la realidad”, “Si fuera una función exponencial crecería indefinidamente, no se acota a un determinado tiempo”. Estas expresiones muestran que la propuesta realizada incentivó a los estudiantes a realizar críticas al problema planteado.

Las actividades desarrolladas en la resolución de este problema muestran la diversidad de abordajes utilizados: visual, algebraico, numérico y computacional. Se puede observar cómo la resolución fue mediada por la presencia de calculadora y computadora. Ciertamente el problema puede resolverse sin ellas, pero resolverlo con ellas, permitió la constitución de un colectivo pensante que dio lugar a múltiples representaciones.

A modo de breve conclusión

Los ejemplos anteriores se constituyen en una muestra de las estrategias pedagógicas que pueden acompañar la incorporación de tecnologías en ámbitos educativos entendiendo que dicha incorporación implica la constitución de nuevos colectivos pensantes integrados por humanos y medios. Los ejemplos muestran producciones matemáticas de estudiantes de diferentes niveles educativos trabajando en contextos variados. En cada uno de ellos se señalaron aspectos que revelan la particularidad de dichas producciones asociadas a la presencia de diferentes tecnologías que actuaron como co-actores en la conformación de colectivos humanos-con-medios integrados por estudiantes y computadoras provistas de determinados software, calculadoras comunes o calculadoras gráficas, en un caso acopladas a sensores de movimiento.

A partir de los análisis realizados en cada ejemplo, podemos decir, en síntesis que:

- Las respuestas provenientes de la computadora influencian el estilo de construcción matemática.
- Surgen nuevos abordajes para la resolución de problemas basados en la posibilidad de representaciones múltiples y la generación de conjeturas que pueden ser refutadas y reformuladas o validadas.
- La visualización y la experimentación son favorecidas.
- Se desafía la hegemonía de lo algorítmico y lo algebraico que caracteriza la enseñanza matemática tradicional.

Para terminar, me gustaría volver a una de las preguntas planteadas por Ponte (2000) y que presentara anteriormente: ¿El surgimiento de la sociedad de la información requiere de una nueva pedagogía? Lévy (1993) advirtió:

> Es grande la tentación de condenar o ignorar aquello que nos es extraño. Es aún posible que no percibamos la existencia de nuevos estilos de saber, simplemente porque no corresponden a los criterios y definiciones que nos constituyeron y que heredamos de la tradición (p. 117).

Teniendo en cuenta esta advertencia es indudable que la respuesta a la pregunta de Ponte es sí. Se requiere de una pedagogía que esté en sinergia con las TICs y de cambios curriculares importantes para evitar, como decía Seymour Papert, colocar un motor de cohete a un carro viejo.

Bibliografía

BASTOS, M. "Do quadro-negro à lousa digital: A história de um dispositivo escolar". En *Cadernos de História da Educação*, Uberlândia, n. 4, p. 133–141, 2005.

BELL, D. O. "New identifications in Raphael's 'School of Athens'", *The Art Bulletin,* v. 77, n. 4, p. 639-646, 1995, New York.

BORBA, M.; VILLARREAL, M. *Humans-with-media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. 1.ed.. (Mathematics Education Library, V. 39). New York: Springer Science+business Media, 2005.

BORBA, M.; PENTEADO, M. *Informática e Educação Matemática*. 1. ed. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

BORBA, M. "Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática". En *SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 1, 1995, Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1995, p.71-90.

DAVIS, P.; HERSH, R. *Experiencia matemática*. Traducción de L. Bou García. 1. ed. Barcelona: Labor, 1989.

ETCHEVERRY, N. *et. al.* "Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización". En *Zetetiké*, Campinas, v. 12, n. 21, p.57-81. 2004.

GVIRTZ, S. *El discurso escolar a través de los cuadernos de clase. Argentina 1930-1970*. 1. Buenos Aires: EUDEBA, 1999.

HÉBRARD, J. “Por uma bibliografia material das escritas ordinárias: o espaço gráfico do caderno escolar (França - Séculos XIX e XX)”. En *Revista Brasileira de História da Educação*, Curitiba, v. 1, n. 1, p. 115-141. 2001.
KENSKI, V. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. 1. ed. Campinas: Papirus, 2007.
LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência. O futuro do pensamento na era da informática*. Traducción de C. Costa. São Paulo: Editora 34, 1993.
PAPERT, S. “Education for the knowledge society. A Russia-oriented perspective on technology and school”. En *IITE Newsletter*, n. 1, p.1-2, Jan-Mar. 2001. Disponible en <http://www.iite.ru/img/upload/Newsletter_1(2001).pdf>. Acceso en 31 jul. 2007.
PONTE, J. P “Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios?”. Em *Revista Ibero-Americana de Educação*, n. 24, p. 63-90. 2000.
SAIZ, I.; ACUÑA, N. *Nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática*. Documento publicado en el portal educativo del Ministerio de Educación Argentino. Disponible en <http://aportes.educ.ar/matematica/nucleo-teorico/influencia-de-las-tic/>. Acceso en 1 jun. 2009.
SCHEFFER, N. *Sensores, informática e o corpo: noção de movimento no Ensino Fundamental*. Tesis (Doctorado em Educación Matemática) Instituto de Geociencias e Ciencias Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro – Brasil, 2001.
STEFFE, L.; THOMPSON, P. “Teaching Experiment Methodology: Underlying principles and essential elements”. En: KELLY, A. E.; LESH, R. (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*, Mahwah, Lawrence Erlbaum Associates, 2000, p. 267-307.
THURSTON, W. “On Proof and Progress in Mathematics”. En *Bulletin of the American Mathematical Society*. Providence, v.30, n. 2, p. 161-177. 1994.
TIKHOMIROV, O. K. “The psychological consequences of computarization”. En: WERTSCH, J.V. (Ed.). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: M.E. Sharpe Inc, 1981.
VILLARREAL, M. “Transformaciones que las tecnologías de la información y la comunicación traen para la Educación Matemática”. En *Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral*, Santa Fe, n. 1, p. 41-55. 2004.
VILLARREAL, M.; BAZÁN, N. “La modelización matemática como estrategia pedagógica: relato de una experiencia”. En: *CONGRESO DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS AGROPECUARIAS*, 1, 2006, Córdoba:

Facultad de Ciencias Agropecuarias – Universidad Nacional de Córdoba, 2006. 10 páginas. 1 CD-ROM.
VILLARREAL, M.; BORBA, M. "Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and … notebooks throughout 100 years of ICMI". En *ZDM*. The International Journal on Mathematics Education, Karlsruhe, v. 42, n 1-2, p. 49-62, 2010 .

Notas

1 Artículo elaborado sobre la base de la conferencia dictada en la Universidad Estadual de Campinas en la marco del Programa de Postgrados Asociados entre el Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de Córdoba y el Doctorado en Educación de la Universidad Estadual de Campinas (UNICAMP). El texto de esta conferencia está basado parcialmente en diferentes escritos ya publicados o en fase de publicación (Villarreal; Borba, 2010, Borba; Villarreal, 2005 y Villarreal, 2004).
2 Mayores detalles acerca de este ejemplo pueden consultarse en Borba; Penteado, 2001 y Borba; Villarreal, 2005.
3 Detalles de este trabajo pueden encontrarse en Etcheverry et al., 2004 y Borba; Villarreal, 2005.
4 CBR: Calculator Based Ranger – detector de movimiento que mide distancias, velocidad y aceleración.
5 Observación: en este caso, lo que los alumnos denominan *x* sería la altura de la planta. Se aclara esto para que no se confunda con la variable *x* como el tiempo.
6 Software de uso libre que permite realizar gráficos de funciones, ajustar curvas a un cierto conjunto de puntos, entre otras opciones.