



Una experiencia colaborativa en torno a la enseñanza de los números racionales en la escuela primaria

María Laura Imvinkelried*

Introducción

En este capítulo presento parte del recorrido realizado en una primera etapa de investigación del doctorado que lleva el título *“La adaptación e implementación de situaciones didácticas y el análisis de las clases, como un medio privilegiado de formación de maestros y de producción de conocimientos didácticos. El caso de una experiencia colaborativa en torno a la enseñanza de los números racionales en la escuela primaria”* cuyo director es el Dr. Nicolás Gerez Cuevas y el codirector Dr. David Block Sevilla. Se trata de presentar un avance sólo de los fundamentos y del trabajo de campo realizado hasta el momento, pero no se presentan hallazgos ni conclusiones surgidas de los análisis.

¿Cómo surge esta investigación en mi recorrido de formación y qué experiencia de investigación había realizado previamente? Sería pertinente, en primera instancia, recuperar parte de la historia... Hace pocos años, realicé una tesis de maestría (Imvinkelried, 2020) que planteaba como objetivo general estudiar las concepciones de los estudiantes de 1^{er} año y 4^{to} año del Profesorado de Nivel Primario en relación con el concepto de fracción y, como objetivos específicos analizar los significados del concepto de fracción que construyeron los estudiantes —futuros maestros— en su trayectoria de formación en el Nivel Superior e identificar y categorizar los errores y/u obstáculos que se encuentran en las producciones de los estudiantes con relación al concepto de fracción.

En aquel momento, al llegar al final de la investigación, nos planteamos algunas líneas de acción junto a mi directora Mgter. Graciela Chermello y codirectora Mgter. Silvia Bernardis, para seguir profundizando en la temática a partir de los insumos obtenidos y de los interrogantes que quedaron por responder. En primer lugar, una de las líneas de acción fue

* Doctorado en Educación en Ciencias Básicas y Tecnología, FAMAF-FCEfYn-FCQ, UNC
/ mimvinkelried@gmail.com

repensar las propuestas de enseñanza en el Nivel Superior y cómo sería posible potenciar las mismas a corto y mediano plazo. Y en ese sentido, concentramos nuestra mirada en cómo trabajar la noción de fracción y los distintos significados de las fracciones asociados a la idea de división, de medida y de proporcionalidad, como así también en qué modificaciones realizar a las propuestas de enseñanza para intentar lograr —al finalizar la formación inicial— una concepción global, dinámica y funcional, ligada a prácticas algebraicas.

En segundo lugar, pensamos que las conclusiones obtenidas podrían ser aprovechadas como temáticas de capacitaciones que se realizaran con los docentes en ejercicio o también para otras investigaciones. Y, a partir de allí, que estos hallazgos permitieran identificar conocimientos y dificultades a los y las maestras, en relación con la temática y trabajar para superarlos a partir de un trabajo colaborativo entre capacitadores, investigadores y maestras.

Sintetizando nuestro desafío en aquel momento, la intención era que se priorice un trabajo matemático que analice con los estudiantes y docentes en ejercicio experiencias posibles de llevar a la práctica. Como, por ejemplo:

—Experiencias de reparto en las cuales se trabaje tempranamente en 1^{ero} y 2^{do} grado con bipartición, es decir con fracciones del tipo, en 3^{ero} y 4^{to} grado con la cuantificación del reparto y en los últimos años de la escuela primaria con la relación $a : b =$ con el fin de consolidar la identidad entre división y fracción.

—Experiencias de medición efectiva, que promuevan la selección de la unidad de medida y el uso de la misma en problemas que impliquen medir objetos.

—Un trabajo articulado en torno a la proporcionalidad a lo largo de la escolaridad obligatoria, que permita reconocer y trabajar con la constante de proporcionalidad cuando es fraccionaria. Además, que dicho trabajo promueva una mirada funcional de la proporcionalidad por sobre una mirada estática.

Por último, reafirmamos en aquel momento la necesidad de continuar con esta línea de investigación y profundizar en la temática, a la luz de los análisis realizados y de los resultados obtenidos con ese grupo de estudiantes. El desafío continuó...habíamos afirmado en aquel momento. Y así fue, el desafío continuó y sirvió para delinear las primeras ideas del proyecto de investigación del doctorado y establecer los primeros vínculos con el equipo de trabajo. A continuación, presento parte del recorrido realizado hasta el momento en el presente proyecto de investigación.

Sobre la problemática de investigación

El tema elegido para la investigación del doctorado es el estudio de una experiencia colaborativa de formación de docentes destinada a enriquecer la enseñanza de los racionales en el segundo ciclo de una escuela primaria, en un entorno de formación continua y contextualizada. Es preciso señalar, que, si bien nos referimos a los números racionales, en el nivel primario de la mayoría de los sistemas escolares no se suele estudiar el concepto de racional definido como clase de fracciones equivalentes, ni las propiedades estructurales del conjunto de los racionales, sino las fracciones y los decimales, en algunos de sus distintos significados. Por ello, en lo sucesivo hablaré de fracciones excepto cuando, por el sentido de lo que afirme, sea pertinente remitir al concepto abstracto de racional. De un modo próximo Freudenthal afirma: “[...] el objeto matemático que importa es el número racional más que la fracción. No obstante, puse la palabra fracciones en el título, y lo hice intencionadamente. Las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional – una fuente que nunca se seca” (1983, p.2).

El objeto de estudio refiere a una experiencia de trabajo colaborativo, entre profesores de 2^{do} ciclo del nivel primario e investigadores, de adaptación, experimentación y análisis de situaciones didácticas, orientado al enriquecimiento de las prácticas habituales y a la producción didáctica. La experiencia de formación incluyó la puesta en práctica de cada profesor, en su aula, de una secuencia didáctica y el análisis posterior, colectivo, de dicha implementación. La secuencia didáctica fue propuesta por nosotros –los investigadores– y adaptada en conjunto –investigadores y maestros–. Así, si bien la experiencia colaborativa para la formación docente es el principal objeto de estudio de esta investigación, hay un segundo objeto

que se deriva de aquél: se trata de las situaciones didácticas mismas que generará el colectivo, y que, al ser implementadas, permitirán generar conocimientos valiosos sobre situaciones didácticas factibles para la enseñanza de las fracciones en el nivel básico.

Las preguntas que guiaron las acciones realizadas hasta el momento y el proceso investigativo que continúa son:

- ¿Qué conocimientos sobre la enseñanza construyen los maestros a partir de las interacciones y las retroalimentaciones que brinda la experiencia, (principalmente dos: la que ofrecen los compañeros y los investigadores, por un lado; y la que ofrece la experiencia en el aula por otro)? ¿Qué lugar ocupan en estos aprendizajes los conocimientos de didáctica aportados por los investigadores, por un lado, y los conocimientos de la experiencia aportados por los docentes, por el otro? A lo largo de la experiencia, ¿Se pueden reconocer indicios de cambios en sus prácticas de enseñanza de las fracciones? ¿En qué aspectos los maestros manifiestan que se han dado estos cambios?
- ¿Qué características didácticas tienen las secuencias analizadas y adaptadas en la fase de cooperación? ¿Cómo se articulan en dicha fase los aportes de la investigación didáctica y los conocimientos sobre la enseñanza de los maestros participantes? ¿Qué tipo de transformaciones hacen los docentes al implementarlas -qué se conserva, qué cambia, cómo se responde ante lo no previsto- con respecto a lo planeado?

Los insumos de esta investigación serán relevantes pues contribuirán al conocimiento sobre los procesos de formación continua de maestros en el área de enseñanza de las matemáticas, conocimiento que puede ser valioso tanto para los investigadores del campo como para los formadores de maestros. Además, aportarán conocimientos específicos sobre la enseñanza de las fracciones en el segundo ciclo de la escuela primaria. Por otra parte, se pretende generar conocimientos sobre la experiencia de trabajo colaborativo y de producción de conocimientos didácticos asociados a él.

Antecedentes sobre el tema y marco teórico

A) Didáctica de las matemáticas

Entre los actuales enfoques de la Educación Matemática, elijo como marco teórico para el análisis didáctico de esta investigación educativa a la Escuela Francesa y fundamentalmente a la Teoría de las Situaciones Didácticas, en adelante TSD. Esta teoría nace en los años 70 en Francia de la mano de Guy Brousseau con el objetivo de construir un modelo de las situaciones. En palabras de Brousseau (2000):

La búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de las matemáticas y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento así como la idea que tienen de las matemáticas, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica. (p. 17)

En este trabajo hice jugar a una secuencia de situaciones didácticas un papel estratégico, por lo que esta teoría resulta muy oportuna. Con ella, asumí la postura de analizar los conocimientos a través de las situaciones problemáticas que los ponen en juego, que los funcionaliza, así como la conceptualización del aprendizaje según la cual los sujetos aprenden al enfrentarse a situaciones problemáticas que resultan desafíos para ellos; esto es, suscribo la idea de que, para aprender matemáticas, hay que producirlas. Nociones específicas de la TSD se constituyen en herramientas tanto para el diseño de secuencias como para el análisis de la enseñanza en el aula.

En cuanto a la temática de la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria, pretendo recuperar los aportes de algunos investigadores fun-

damentales en el campo: Brousseau et al. (2004), Freudenthal (1983), Kieren (1988) y también considero los trabajos más recientes realizados por Block (2006, 2007), entre otros. Los investigadores, acuerdan que las fracciones se comprenden mejor cuando se utilizan como herramientas para resolver problemas. En este sentido, se observa que hay diferentes tipos de problemas donde las fracciones juegan diferentes roles: pueden expresar medidas, relaciones, razones u operadores multiplicativos. Estos distintos roles dan lugar a distintos significados, los cuales han sido nombrados de distintas maneras distintas. Por ejemplo, Kieren habla de “constructos”, Freudenthal de “fenómenos” que agrupa en ciertos tipos, Brousseau habla de “situaciones fundamentales”. A partir de estas consideraciones, a lo largo de la investigación, analizaré cuál/es significados retomar y cómo hacerlo para realizar el diseño, implementación y análisis de las propuestas.

B) La investigación colaborativa

En este proyecto opté por la investigación colaborativa entre maestros e investigadores. Esta modalidad de indagación se relaciona con tradiciones en el campo educativo que han procurado integrar el punto de vista de los docentes en la construcción de un conocimiento más ajustado a la realidad de la práctica (Bednarz, 2009). En tal sentido, Desgagné et al. plantean:

Desde el interior de las corrientes de investigación que tienen en común hacer investigación “con” en lugar de “sobre” los docentes, y que reconocen su “competencia como actor en contexto”, debe recordarse que la investigación colaborativa parte de un conjunto de prácticas de investigación participativa para docentes que dan lugar a diferentes nombres: investigación de acción, investigación colaborativa, investigación de acción colaborativa, investigación participativa, investigación en asociación, etc. Las fronteras entre estas diversas identidades de las prácticas de investigación [...], no son herméticas y probablemente no es necesario que lo sean. (2001, p.3)

Dentro del conjunto de enfoques desarrollados como investigación colaborativa retomo la tradición [o la perspectiva] nacida en Quebec a partir de los estudios de Bednarz (Bednarz, 2013; Desgagné et al., 2001). Esta modalidad consta de tres momentos: la etapa de co-situación (se de-

cide el qué y el cómo), la cooperación (se implementa) y la coproducción (se elaboran productos a raíz de la experiencia llevada a cabo).

En la revisión de antecedentes, profundicé en los trabajos que consideran a la investigación colaborativa como eje de su investigación y la vinculan con algunas temáticas más específicas de la enseñanza de la matemática, entre otros: el proyecto de Bednarz (2000); Saboya (2013), y Castaño (2021). Así mismo, revisé investigaciones colaborativas desarrolladas desde diferentes perspectivas, como por ejemplo las presentes en las Proceedings del ICMI Study 25 (Borko y Potari, 2020).

Metodología

A continuación, especifico el contenido de las tres etapas que conforman la modalidad colaborativa (desde la perspectiva adoptada): la etapa de co-situación, la de co-operación (se implementa) y la de co-producción (se elaboran productos a raíz de la experiencia llevada a cabo). Algunas de las acciones previstas ya fueron realizadas al momento de la escritura del capítulo y otras están por realizarse en los próximos meses.

Características previstas para la etapa de co-situación

-Revisión documental por parte de los investigadores acerca de distintos proyectos colaborativos, como así también de la situación actual de la enseñanza de las fracciones: aportes de los estudios en didáctica de las fracciones, análisis del diseño curricular, análisis de las concepciones de los maestros sobre este conjunto numérico y su enseñanza.

- Encuentro con los directivos y los docentes que desean participar del proyecto, en el cual se presenta el objetivo del mismo y se negocia, con la finalidad de acordar un proyecto de trabajo que incorpore los intereses tanto de los investigadores como de los docentes. Además, se generan los acuerdos para la entrada a campo.
- Realización de un taller de iniciación en el que se propone a los maestros participantes un análisis didáctico/epistemológico introductorio, sobre la noción de fracción.

- Análisis de secuencias de enseñanza -vinculadas con resultados de investigación en didáctica- en torno a la noción de fracción para un grado -4°, 5° o 6° del 2° ciclo- dependiendo del grupo de docentes que se sume a la investigación. Dichas secuencias abordan significados diferentes de la noción de fracción. Se propone un trabajo en torno al significado de fracción en contextos de medición, es decir en la relación parte/todo vinculada a medición, aspecto que se relaciona con la entrada clásica a las fracciones. También, mi objetivo es trabajar con la fracción como cociente, pues puede integrarse con la primera entrada a la fracción vinculada a la medición, y permite un enriquecimiento importante del repertorio de situaciones y, en consecuencia, de la noción. Estas propuestas de enseñanza constan de una secuencia de actividades constituidas por problemas en contextos extramatemáticos e intramatemáticos, que incluyen distintos tipos de tareas matemáticas y teniendo en cuenta algunas variables didácticas que permitan el avance en los procedimientos y conocimientos puestos en juego.

Características previstas para la etapa de co-operación

Antes de presentar un listado de posibles propuestas para esta etapa, quiero destacar la centralidad de la actividad reflexiva en el modelo colaborativo. Dicha reflexión se basa,

[...] en la explicitación y el análisis de situaciones de práctica experimentadas por los maestros, desde el ángulo de interés común definido por el proyecto de exploración. Esto significa que la actividad está organizada de tal manera que promueve y asegura que se mantenga una especie de “conversación”, Schön (1991), entre la práctica (de los maestros) y la retroalimentación reflexiva sobre esta práctica (entre profesionales e investigadores). (Desgagné et al., 2001, p.37)

A continuación, presento las posibles acciones que configuran la etapa co-situación:

- Observaciones de sesiones de clases. Las observaciones se llevan a cabo una vez que se valore la construcción de cierto nivel de



confianza entre los maestros y los investigadores. En las primeras sesiones puede suceder que los maestros se observen entre sí o que sólo se produzcan relatos de la experiencia y/o registros escritos; las observaciones por investigadores se incluyen en sesiones posteriores. Estas observaciones tienen dos propósitos centrales: brindar información a los observadores para poder retroalimentar a los docentes (además de que los docentes también reciben información valiosa para sí mismos cuando observan a un compañero); y recabar datos para la investigación.

- Sesiones grupales de investigadores y docentes para ajustar detalles de planeación de la sesión próxima y analizar conjuntamente aspectos relevantes de la sesión recién implementada.
- Análisis de las situaciones didácticas atendiendo a los diferentes aspectos: espacios, tiempos, agrupamientos de los estudiantes; como también a las intencionalidades docentes; conocimientos, tipos de tareas, procedimientos y validaciones producidas por parte de los niños, intervenciones docentes, anticipaciones factibles de los docentes y evaluación. La gestión de estos espacios estará a mi cargo y eventualmente del director de la tesis.
- Entrevistas semiestructuradas a los maestros que participan de la investigación.

Características previstas para la etapa de co-producción

Para los investigadores:

- Análisis de los datos obtenidos en la etapa de cooperación (las secuencias planeadas y su justificación; registros de las sesiones colectivas con los maestros; registros de clases; registros de las entrevistas) y elaboración de las conclusiones en relación con el objeto de estudio y los objetivos planteados en la tesis.

- Escritura de artículos por parte de los investigadores sobre la experiencia realizada, para presentar en revistas de educación o socializar por otros canales con maestros de escuela primaria y formadores.

Para los investigadores y maestros:

- Escritura de artículos con los maestros, para socializar las situaciones didácticas implementadas

Para los maestros:

- Incorporación de las propuestas de enseñanza analizadas, modificadas e implementadas, a su acervo personal; como así también al material didáctico de la escuela.

Algunas decisiones sobre el trabajo de campo

En relación con el trabajo de campo previsto, a fines de octubre de 2022 comencé la interacción con la escuela que estaba prevista sumarse al proyecto desde el comienzo. Dadas algunas dificultades, éstas implican una toma de decisión metodológica importante orientada a garantizar la viabilidad del trabajo. Esta decisión consistió en cambiar de escuela, y establecer los primeros contactos en el marco del proyecto con otra escuela que estaba interesada y lo había manifestado previamente.

En el mes de noviembre de 2022, acordé con el equipo directivo de esta nueva escuela, un primer acercamiento con todas las docentes de la institución para el mes de febrero de 2023 a través de un Taller de Iniciación. También establecimos los días y horarios para realizar entrevistas semi-estructuradas con las maestras que participarían del proyecto.

A lo largo del segundo cuatrimestre del 2022, planifiqué el Taller de Iniciación y la escritura del mismo. Esto requirió tiempo de estudio, planificación y encuentros virtuales con el director y Codirector de la investigación para realizar ajustes a la planificación. En este Taller se propuso a los maestros participantes un análisis didáctico/epistemológico introductorio sobre la noción de fracción. En el apartado *“El Taller de Iniciación con todas las docentes de la escuela”* describiré las características que tuvo el mismo y algunos análisis de las producciones de las maestras.

Cabe aclarar que, ya estando en campo, tomé algunas decisiones que me llevaron a plantear otras estrategias metodológicas que no había anticipado en el proyecto. Una de las estrategias fue organizar unos primeros encuentros grupales en el primer cuatrimestre del año 2023 para reconstruir prácticas y sentidos de las maestras de 2^{do} ciclo que participarían en el proyecto. En el apartado *“Los primeros encuentros con las maestras”* presentaré algunos intercambios que se sucedieron y que permitieron conocer formas de trabajo, de planificación, uso del tiempo y de los espacios, entre otros aspectos interesantes para la gestión del aula y la planificación de las secuencias didácticas.

Por último, en el primer cuatrimestre del año 2023, luego de los encuentros realizados con las maestras, me dediqué al diseño de las secuencias de enseñanza para luego ser analizadas junto con las maestras de 2^{do} ciclo, acción considerada también en la etapa de co-situación. Para luego, en el 2^{do} cuatrimestre poder implementar dichas secuencias en cuarto, quinto, sexto y séptimo grado. En los apartados *“El diseño de las secuencias didácticas”* y *“Sobre la implementación de las secuencias didácticas”* describo algunas acciones llevadas a cabo y unos primeros análisis.

Sobre las primeras entrevistas semi-estructuradas

En el mes de diciembre del año 2022, realicé las entrevistas semi-estructuradas con el objetivo de recuperar las inquietudes, preocupaciones, logros y/o desafíos en relación con la enseñanza de la matemática de las maestras implicadas en el proyecto. El objetivo central fue que los docentes puedan explicitar algunas ideas que forman parte de sus marcos de referencia y que subyacen a sus prácticas y de esta manera, comenzar con los primeros pasos en el trabajo colaborativo. Unas primeras interpretaciones que realicé a partir de estas entrevistas, es que se percibe una preocupación por la comprensión de las consignas y la falta de explicitación de los procedimientos utilizados al resolver diversos problemas. También, expresaron la necesidad de articulación intraciclo e interciclo en relación con los contenidos y las formas de abordarlos. En particular, en relación con la enseñanza de las fracciones encontré expresiones del tipo “les cuesta entender que la fracción es una división... a ellos no les cierra esta noción”, “tienen dificultad en la búsqueda de expresiones equivalentes” o “se confunden porque en su casa les enseñan otras formas de sumar con distintos deno-

minadores”. A partir de estas y otras expresiones, me pregunté si ¿el foco de la enseñanza de las fracciones estaría puesto solamente en las técnicas y algoritmos de las operaciones y muy poco en los significados?, interrogante que se intentará responder a partir de los análisis posteriores.

El Taller de Iniciación con todas las docentes de la escuela

En el mes de febrero de 2023 se concretó el Taller de Iniciación -que estaba previsto en la etapa de co-situación- con la participación de los docentes de 1^{ero} a 7^{mo} grado. A lo largo de dos jornadas de trabajo, el taller permitió recuperar las voces de las docentes y continuar estableciendo los vínculos necesarios para abordar el trabajo colaborativo posterior.

El propósito que me planteé con el taller fue ofrecer un panorama de la graduación de problemas en contexto de reparto -desde 1^{er} grado hasta 7^{mo} grado- donde intervienen los significados de la fracción como cociente, parte-todo y medida, a través de la resolución y el análisis de los mismos.

Cabe aclarar que las situaciones que propuse intentaron poner en discusión con las maestras participantes, las posibilidades de trabajo en cada grado y ciclo de la escuela primaria y no pretendieron constituirse en secuencias didácticas para ser implementadas directamente en el aula. En el mismo sentido, hay que tener en cuenta que los problemas presentados pueden formar parte de una secuencia y por lo tanto los saberes disponibles para abordarlos pueden ser diversos, todo depende de qué contenidos se hayan desarrollado antes y qué decisiones didácticas haya tomado el docente.

Comparto una actividad del Taller propuesta para 1^{er} o 2^{do} grado, con el objetivo de ilustrar algunos análisis que realizamos. Recuperando lo que expresé en la introducción del capítulo, habíamos concluido en la tesis de maestría, la necesidad de trabajar con los maestros el análisis de experiencias de reparto en las cuales se trabaje tempranamente en 1^{ero} y 2^{do} grado con bipartición, es decir con fracciones del tipo. Recuperé esta idea y la planteé a las maestras del Taller. Toda la consigna y el análisis realizado es una adaptación de una propuesta de Block (2022).



Analicen la siguiente situación y a continuación respondan las preguntas:

“Los alumnos de primer grado de primaria, organizados en equipos de dos o cuatro, realizaron una actividad que consistía en repartirse 3 tortas entre 2 niños (se le facilitó a cada grupo hojas de papel tamaño carta que representaban las tortas) de manera que a cada uno le tocara lo mismo y no sobrara torta”

a- ¿Qué procedimientos correctos o erróneos creen que podrían utilizar los niños y niñas para resolver esta situación? Enumérelas

b- ¿Por qué podrían aparecer procedimientos erróneos?

c- Analicen el siguiente reparto de un grupo de 1^{er} grado y respondan: ¿Qué opinan del criterio que usaron los niños para corregir el reparto, a saber, que a todos les toque el mismo número de pedazos?

“Uno de los equipos de primer año hizo el reparto tipo 4. El grupo no lo aceptó como bueno, argumentando que no estaba bien porque a un niño le había tocado más torta: uno tenía cuatro pedazos y el otro solo dos. Al preguntar el observador qué se podía hacer para que les tocara lo mismo, una niña respondió: pasándole un pedazo al otro niño; lo hace y el grupo acepta entonces que así a los dos niños les ha tocado lo mismo, tres pedazos”.

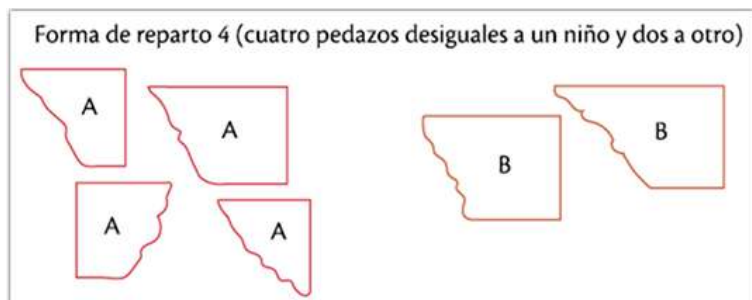


Imagen 1. Título: Reparto tipo 4. Fuente: Block, 2022

d- ¿Qué saberes tienen que tener disponibles los chicos y chicas para poder abordar esta situación?

e- ¿Qué aprenden los chicos y chicas al resolver estos problemas de repartos? ¿Qué cuestiones de las fracciones pueden aprender?

Cabe aclarar que, previamente a la implementación del Taller, había realizado un análisis para acompañar las interpretaciones y comentarios que realizaran las maestras en esas dos jornadas. A continuación, recupero parte de estos análisis junto a algunas respuestas de las docentes. Para la consigna c- había considerado el análisis de Block (2022), en cuanto a la relación inversa entre dos variables: entre más pedazos, más pequeños. En esta situación hay dos datos que varían de manera inversa, el número de pedacitos en que se divide una cantidad y su tamaño: entre mayor es el número de pedacitos, menor es el tamaño de cada pedacito. Por su parte, la cantidad total a repartir no cambia. Puede observarse que los niños se centran en una variable (número de pedazos) y dejan de lado la otra (el tamaño de los pedazos), por eso no se dan cuenta de que la cantidad total a repartir no cambia.

Algunas respuestas al inciso c- fueron:

M₁: Los chicos contaron los pedazos atendiendo a la cantidad de partes que le tocaba a cada uno y no a la proporción.

M₂: Es un criterio que comúnmente utilizan los chicos ya que tienen en cuenta la cantidad de partes más que la parte en sí.

M₃: Se tuvo en cuenta la cantidad de porciones repartidas, no el tamaño de cada una.

Sobre la consigna d- ¿Qué saberes tienen que tener disponibles los chicos y chicas para poder abordar esta situación? El análisis que realicé a priori fue que los estudiantes de primer ciclo no necesitan un conocimiento previo de fracciones para resolver los problemas de reparto que se les plantean. De hecho, en los posibles procedimientos correctos y erróneos propuestos seguramente las fracciones no se escribieron, ni se mencionaron; esto también ocurrió en la experiencia llevada a cabo por Dávila



(1992) que tomé como parte del análisis de la propuesta para compartir con las maestras.

Algunos saberes que nombraron las docentes para el inciso c- fueron que, los chicos deberían poder tener una noción de repartir y qué implica partir y cortar, o la noción de conteo también nombraron como necesaria.

Sobre la consigna e-, el propósito que planifiqué para la actividad es que, los chicos y chicas de 1^{er} y 2^{do} grado, al realizar estos repartos, aprendan a hacer repartos equitativos (que a todos les toque lo mismo) y exhaustivos (que se reparta todo y no sobre nada), utilizando biparticiones. Por esto es conveniente proponer que los repartos sean entre 2, 4, 8, ... Pueden hacer repartos de uno o de varios enteros, con un resultado mayor o menor a un entero. Cabe aclarar que, no es que sea mejor hacer biparticiones, simplemente que es la forma de partir que los niños primero dominan, y es conveniente retomarla para un primer estudio de las fracciones. Además, hay un saber fundamental puesto en juego y es que: la cantidad no se determina sólo por el número de pedazos, sino también por el tamaño de los pedazos. Otro saber que subyace es: entre más pedazos se hacen, más chicos son. Está en juego una relación proporcional inversa que puede costar trabajo a los pequeños.

Con respecto a la introducción de los nombres de las fracciones, y de su escritura, se recomienda esperar hasta el tercer grado. Comprender que una notación (por ejemplo $1/2$) formada por dos números («1» y «2») expresa una cantidad y no dos, es difícil, más cuando los alumnos están en proceso de afianzar su conocimiento de los primeros números naturales. Además, ¿cómo comprender que $1/2$ es equivalente a $2/4$ cuando para ellos cuatro pedacitos son más que dos pedacitos? (Block, 2022, p.42)

Las maestras respondieron frente a este interrogante que:

M₁: Aprenden que a partir de distintas estrategias pueden llegar al mismo resultado siendo todas válidas. Pueden aprender equivalencias.

M₂: Que repartir es dar partes en igual cantidad, y que para repartir primero tuvieron que partir. Además, aprenden distintas opciones de reparto.

M₃: Pueden aprender a hacer equitativamente la repartición.

La tarea que aún me queda pendiente para realizar en los próximos meses, es el análisis de las respuestas correctas, no tan completas y/o erróneas de las maestras participantes y los intercambios que se dieron, los cuales quedaron registrados en grabaciones.

Los primeros encuentros con las maestras

Como lo mencioné en párrafos anteriores, una de las estrategias no planificadas al comienzo del proyecto, fue organizar encuentros grupales en el primer cuatrimestre del año 2023 para reconstruir prácticas y sentidos que tuvieran contruidos las maestras de 2^{do} ciclo que participarían en el proyecto. En estos encuentros, dialogamos sobre los materiales que utilizan para planificar, qué preocupaciones tienen sobre la enseñanza de las fracciones, en qué momento del año tenían pensado trabajar con las fracciones y fundamentalmente qué tipo de trabajo se había realizado en años anteriores con los grupos de estudiantes. Esta última cuestión resultó central y un insumo fundamental para ir precisando las secuencias didácticas de cada grado. Estos encuentros funcionaron como un recurso exploratorio de la realidad institucional, específicamente de algunas prácticas de enseñanza de las matemáticas. Un primer análisis de la información recogida en estos encuentros y de otras fuentes (cuadernos de los estudiantes, libros de textos utilizados, intercambios informales con las maestras) me permiten repreguntarme si ¿existe una prevalencia en la enseñanza de un trabajo algorítmico por sobre la construcción de los significados de las fracciones?

Maestra: Lo que me acuerdo, ahora sí, para comentarte, fue el trabajo con fracciones, es el tema de lo que tiene que ver con trabajar las equivalencias. Viste que la forma en que trabajamos con las sumas, con las restas, con fracciones de distintos denominadores, es buscar la equivalencia para que tengan el mismo denominador y después el procedimiento que depende de cuando son sumas y restas con el mismo denominador. Ese procedimiento, de multiplicar el numerador y el denominador, el de arriba y el de abajo por el mismo número, lleva a muchas cuestiones en el hacer, es lo que más les cuesta. Y lo que me pasaba, con unas situaciones particulares, es que en casa, sus papás o sus mamás le transmiten otras formas de resolver. Viste que tenés distintas maneras: buscar el denominador



común, venían con “un matete” ... en casa para que hagan una actividad de tarea le enseñaban los papás y con lo que veíamos en el aula...

Entrevistadora: Qué te parece... ¿con estos chicos que estás en séptimo vas a estar con toda esta cuestión de las equivalencias?

Maestra: Es un gran tema en lo que hace a fracciones, yo me he encontrado con una cuestión que lleva mucho, por más que sea algo reiterativo, de tantas actividades que sí o sí lo volvé a aplicar en muchas ocasiones porque para muchas ocasiones, para muchos procedimientos volvé a las equivalentes.

Entrevistadora: Estaba pensando... ¿no te acordás si tenían un repertorio de fracciones equivalentes, como ser un medio es igual a dos cuartos, o un medio es igual a cuatro octavos?

Maestra: algunos sí, no todos...

El diseño de las secuencias didácticas

Para el diseño de las secuencias didácticas tomé como referencia y material de análisis a Block Sevilla (2022). Este texto me permitió analizar y seleccionar problemas que las fracciones resuelven teniendo en cuenta la diversidad de problemas que existen y los roles que las fracciones juegan en diversos contextos. También, fue un insumo para analizar el tipo de consignas y las tareas matemáticas que se ponen en juego en cada actividad que se presenta en la secuencia didáctica.

Una cuestión a definir en primer lugar, antes de la selección de los problemas, fue qué contenidos queríamos trabajar en cada grado. En este sentido, los primeros encuentros con las maestras fueron claves para tomar la decisión, pues en esos encuentros analizamos qué contenidos los chicos y las chicas ya habían abordado en años anteriores, cuáles sí habían trabajado, pero “sobrevolándolos” con poca profundidad- según sus dichos- y cuáles contenidos no habían sido enseñados. Para dicho análisis, tomamos algunas carpetas de los estudiantes del año anterior, el libro de texto que habían utilizado y la planificación del docente. Por ejemplo, en 3^{er} grado, los estudiantes -en relación con fracciones y el eje medida- no

habían trabajado ningún aspecto, lo cual hizo que pensemos la secuencia con algunos contenidos correspondientes a 3^{er} grado y a partir de allí avanzar con otros de 4^{to} grado. O en 4^{to} grado habían realizado un trabajo con fracciones equivalentes a partir de representaciones gráficas y luego directamente un trabajo algorítmico con sumas y restas de igual denominador. Por lo tanto, tomé la decisión de también trabajar con una secuencia de actividades que priorice la noción de fracción en el contexto de la medida, al igual que en 4^{to} grado. Los mismos análisis -de carpetas de los estudiantes, libros de textos utilizados y planificación del docente- realizamos en el caso de 6^{to} y 7^{mo} grado.

A continuación, comencé a pensar en los objetivos que me plantearía y tomé como referencia algunos comentarios que las maestras habían realizado en los encuentros. “No tantos objetivos, pocos, pero a cumplir”. En la secuencia de 4^{to} grado, me propuse que los estudiantes construyan el concepto de fracción en el contexto de situaciones de medición de longitudes, también que puedan realizar mediciones efectivas utilizando distintas unidades de medida y por último que adquieran un repertorio de expresiones equivalentes fraccionarias y cálculos memorizados con fracciones usuales (medios, cuartos y octavos). Para la secuencia de 5^{to} grado, avancé en relación con la propuesta de 4^{to} y propuse construir el concepto de fracción en el contexto de situaciones de medición de longitudes, pesos y capacidades como así también, adquirir un repertorio de expresiones equivalentes fraccionarias y cálculos memorizados de sumas y restas con fracciones usuales (medios, cuartos y octavos) e incorporando otras sumas de fracciones no usuales como tercios y sextos. Para las secuencias de 6^{to} y 7^{mo} grado opté por el contexto de reparto y me propuse que los estudiantes construyeran el concepto de fracción en el contexto de situaciones de reparto, que adquieran un repertorio de expresiones equivalentes fraccionarias y cálculos memorizados con fracciones usuales y por último que puedan comparar y ordenar fracciones utilizando como recurso la recta numérica. La diferencia en 7^{mo} grado fue que pretendía que los estudiantes se aproximaran a generalizar que *m unidades entre n = m/n de unidad y así establecer la relación entre fracción y división*, cuestión que me resultaba muy interesante trabajar como forma de apostar a una articulación entre el nivel primario y el nivel secundario.

En el apartado siguiente, intenté recuperar algunas actividades de estas secuencias, y por esto se describen dos de ellas, una de 4^{to} grado y la



otra de 7^{mo}. Dada la extensión del capítulo se dificulta presentar las secuencias completas, pero gran parte de las actividades se encuentran en el material de Block (2022) que está disponible digitalmente para consultar.

Sobre la implementación de las secuencias didácticas

Se realizó el acompañamiento en cada una de las aulas de la puesta en acto de las secuencias didácticas, articulando los horarios de modo de poder estar presente como observadora en el desarrollo de las mismas. En los casos en que no fue posible se solicitó la grabación de la clase y algunos comentarios de la maestra por WhatsApp.

En este apartado, me gustaría compartir algunas primeras escenas del aula, en las que los intercambios entre los estudiantes, como así también entre la maestra y los estudiantes, son potentes para advertir y analizar la riqueza en cuanto a los saberes que circulan de forma explícita e implícita en la clase.

Algunas escenas del aula de 4^{to} grado

La secuencia de 4^{to} grado que se implementó consta de catorce actividades y se desarrolló a lo largo del mes de septiembre y una semana del mes de octubre de 2023, en un grupo de diecinueve estudiantes. El siguiente registro, es parte de una situación donde el docente propone la elaboración de una regla graduada con fracciones. Conduce la clase y va dando las indicaciones para el plegado y registro -en la tira de las fracciones- de medios, cuartos y octavos. A partir del plegado los estudiantes gradúan la tira U en medios, cuartos y octavos y podrán notar las equivalencias entre las fracciones señaladas. Por ej.: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ entre otras.

Maestra: Vamos a probar. Lo divido en la mitad, lo vuelvo a dividir. Y lo vuelvo a dividir. ¿Cuántos octavos son ahí justo en esa línea?

A₁: Ocho.

Maestra: Acá. ¿Cuántos son?

A₂: Cuatro.

Maestra: Cuatro octavos. O sea que tengo que hacer cuatro pedacitos. Al igual que en la de cuartos tengo que dividirlo...

A₃: ¡Seño! Un cuarto son dos octavos.

Varios Alumnos: Sí.

A₃: Y dos octavos son un cuarto.

[empiezan a intercambiar en un grupito algunas equivalencias, algunas correctas y otras no...]

La maestra, acompaña la construcción de la regla graduada en el pizarrón. La imagen 2 fue tomada del pizarrón:

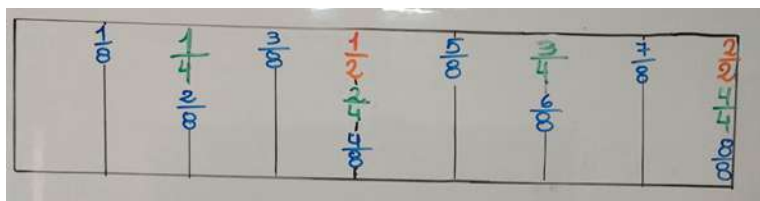


Imagen 2. Título: Regla graduada. Fuente: Elaboración propia

Luego, la secuencia continúa de esta forma:

La maestra anota en el pizarrón las medidas de dos segmentos, por ejemplo, A = $1/2$ de unidad y B = $1/8$ unidad y pregunta:

a) ¿Cuál de los dos segmentos es más largo? (Se aclara que no pueden dibujarlos aún) ¿Por qué piensas que es más largo? Argumentar la respuesta por escrito.

A partir de aquí, los chicos y chicas comienzan a trabajar en pequeños grupos durante unos minutos y luego la maestra recupera en el pizarrón lo que cada grupo fue pensando. El siguiente pizarrón ilustra lo que circuló en ese momento de puesta en común (Imagen 3).

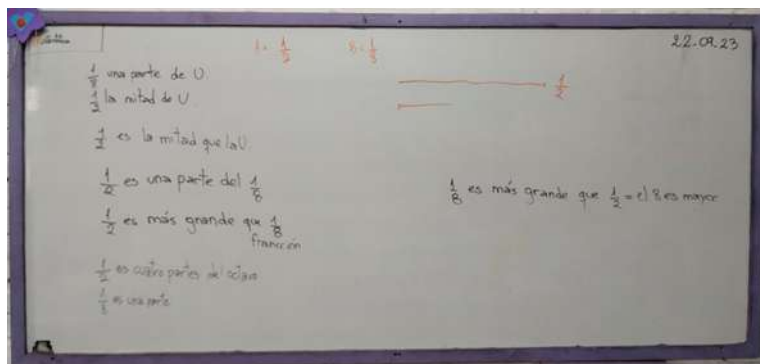


Imagen 3. Título: Pizarrón de la clase de cuarto grado.

Fuente: Elaboración propia.

Luego, la docente propone esta consigna:

- b) Tracen en el piso los segmentos usando la regla graduada con fracciones para medir (la de la Actividad 8), para verificar su elección.

Los estudiantes se entusiasmaron con esta verificación y trabajaron con su regla graduada y tizas de colores, en el piso del aula trazando los segmentos $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{8}$.



Imagen 4. Título: Trabajo con la regla graduada.

Fuente: Elaboración propia.

Maestra: Bien, ahí comprobamos al trazar las líneas en el piso. Por más que el ocho es mayor que el dos, eso no implica que en las fracciones, que estas fracciones sean más grandes. ¿Sí? Esa es la primera comprobación. La otra, vamos a ver, me dijeron varios que un medio era la mitad de la tira unidad.

A₁: Señ, un medio es la mitad de la tira unidad.

A₂: Un octavo, es un cuarto de la mitad de la tira.

Observadora: ¡Qué difícil eso que dijiste y qué interesante!

A₃: Un octavo, es un cuarto del medio.

Algunas escenas del aula de 7^{mo} grado

La secuencia de 7^{mo} grado que se implementó consta de catorce actividades -al igual que la de 4^{to} grado- y se desarrolló la última semana del mes de septiembre y durante dos semanas del mes de octubre de 2023, en un grupo de diecinueve estudiantes. El siguiente registro, es parte de una situación donde el docente propone un problema del libro de texto¹ que estaban usando pero que no estaba pensada en la secuencia didáctica original. Recupero esta actividad, por la riqueza de expresiones fraccionarias con las que trabajaron los chicos y chicas y por los intercambios que se dieron en el aula, cuestión que no habíamos previsto en el análisis previo de la secuencia.

Piensen dos formas diferentes de repartir estos chocolates de forma que no sobre nada y que a cada uno le toque la misma cantidad.

a- 6 chocolates entre 4

b- 14 chocolates entre 3 amigos

c- 3 chocolates entre 4

¹ El libro de texto utilizado fue (Margolis et.al., 2022).

d- 5 chocolates entre 6 amigos

A continuación, presento el intercambio que se da en el aula entre la maestra y distintos estudiantes para el inciso d-, es decir, para el reparto de 5 chocolates entre 6 amigos.

Maestra: ¿Pasamos a la última? Así después ya hacemos una mirada general. Cinco chocolates entre seis chicos.

A₁: Yo en esa solo pude hacer una.

A₂: Sí, yo también.

Maestra: Bueno, vemos entre todos lo que pensaron y capaz que sumamos. Pasá, ... [La maestra nombra a uno de los alumnos para que pase al pizarrón]

[silencio]

A₃: Yo lo que hice fue dividir los primeros tres a la mitad, para que cada uno pueda comer un medio.

Maestra: Para tener seis partes así le da una mitad a cada uno.

A₃: Sí. Y de acá, ahí ya faltaban dos nomás. Porque esto ya lo había dividido y cada uno comía una mitad.

Maestra: De los cinco chocolates te quedaban dos.

A₃: Y como me quedaban dos enteros y no eran dos chicos los que faltaban, los dividí en tres. Así cada uno podía comer un tercio también, un tercio más. Y cada uno come un entero y un tercio.

Maestra: Bueno.

A₃: Estos serían los chicos que yo represento. [Dibuja en el pizarrón]

Maestra: Se ve que no es muy nutritivo el chocolate. Entonces, ponelos por acá. Acá debajo. [La maestra señala el lugar en el pizarrón para dibujar]

Maestra: Como vos decís, un medio. Y... Lo que vos dijiste recién que le daba cada uno.

A₃: un medio y un tercio.

Maestra: Bien, está perfecto. ¿Alguno de los compañeros lo había pensado así también?

[La maestra va nombrando a distintos chicos y chicas para preguntarle si lo pensaron igual o distinto]

Maestra: ¿Los que no lo pensaron así, ¿cómo lo pensaron? Y ahí tendríamos las dos maneras. Bueno, ¿querés pasar? [Nombra a una de las chicas para que pase al pizarrón]

[Silencio]

A₄: Bueno, yo partí tres a la mitad, me daba seis. Después partí uno, dos en seis.

Maestra: En seis. Y entonces ahí, con tu forma de partir, ¿cuánto le das a cada uno ahí?

A₄: Le doy una mitad.

Maestra: ¿Y cuánto? Escribilo allá...poné un igual, un signo igual y poné entonces tu manera de... ¿Cómo dijiste? ¿Primero acá? ¿Cuánto le damos a cada uno?

A₄: una mitad.

Maestra: Bueno, una mitad ¿Cómo lo escribiría?



A₄: un medio.

Maestra: Un medio y ¿de acá qué le dabas?

A₄: Cuartos

Maestra: ¿Estás segura de que son cuartos? ¿En cuántas partes lo dividiste?

A₄: En seis.

Maestra: Entonces son...sex...tos. ¿Cuántos sextos entonces?

A₄: Dos sextos. [Escribe en el pizarrón las expresiones]

A₅: Señor, yo tengo otra.

Maestra: Bueno, a ver...borramos. Pasá y ahí ya cerramos. Pasá y contanos.

A₅: Yo acá hice los cinco chocolates. Yo los partí en sextos y... iba, éste va para éste, éste va para éste, éste va para éste.....

Maestra: Uno de los seis pedacitos para cada uno de los seis chicos.

A₅: Claro, y así con los cinco.

Maestra: Claro, y como son cinco chocolates son cinco sextos. Escribilo ahí, igual, porque también es perfecto.

Como se puede advertir en los diálogos, luego de los intercambios se obtienen distintas expresiones para el reparto “5 chocolates entre 6 amigos”. Cabe aclarar que falta en la escena que recupero del aula, una tarea matemática fundamental como lo es la argumentación de por qué esas expresiones fraccionarias son equivalentes, cuestión relacionada con uno de los contenidos seleccionados para desarrollar: argumentar sobre la equivalencia de diferentes representaciones de un número, usando expresiones

fraccionarias. Todo el intercambio se fue plasmando en la pizarra como muestra la imagen 5:

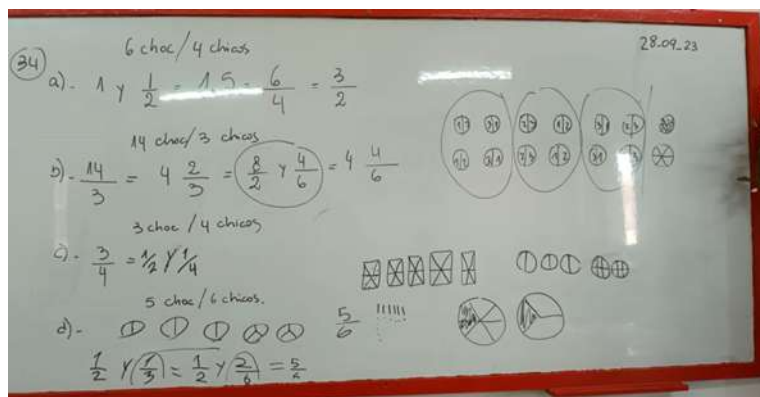


Imagen 5. Título: Pizarrón de la clase de séptimo grado.

Fuente: Elaboración propia.

Las expresiones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ y $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ están acompañadas de representaciones gráficas realizadas por los chicos y chicas, las cuales constituyen un apoyo gráfico para poder pensar las equivalencias entre las expresiones fraccionarias. No se hace énfasis en la exactitud de los gráficos -nótese que se trazaron a mano alzada- ni tampoco en la exactitud de las particiones, sino que son apoyos gráficos para los estudiantes que pasaron al pizarrón a compartir la forma de pensar el reparto. La docente luego recupera estas expresiones que quedaron en el pizarrón y elabora un “cartel de equivalencias” para dejar expuesto en el aula como memoria del trabajo realizado.

A modo de cierre

Comenzaba este capítulo recuperando los desafíos que nos habíamos planteado al finalizar la tesis de maestría y cómo esos desafíos se fueron entretejiendo con los desafíos de la nueva investigación de doctorado. Luego, presenté el tema de investigación, junto a los antecedentes y el marco teórico profundizado hasta el momento. Avanzando en el capítulo

comenté algunas decisiones tomadas en torno al trabajo de campo y realicé algunas descripciones sobre las entrevistas, los primeros encuentros con las maestras participantes, la implementación del taller de iniciación, la planificación de las secuencias didácticas para los cuatro grados del 2^{do} ciclo y por último algunas escenas del aula de 4^{to} y 7^{mo} grado.

Si bien aún no he realizado un análisis detallado y riguroso de los resultados obtenidos en las etapas de co-situación y co-operación, la intención al escribir estas páginas fue compartir el trabajo realizado en estos meses junto al equipo de investigación y las maestras participantes, y en ese compartir poder visibilizar el trabajo docente que se realiza a diario en las escuelas y los desafíos que implica. Y si de desafíos se trata, queda por delante el gran trabajo de análisis de todo el material producido y el avanzar en la etapa de co-producción propuesta en el proyecto.

Referencias

- Bednarz, Nadine. (2000). Formation continue des enseignants en mathématiques : une nécessaire prise en compte du contexte. En P. Blouin y L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 61–78). Montréal : Modulo.
- Bednarz, Nadine. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. París: Ed. L. Harmatan.
- Block, David. (2006). La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico. (1 ed.) Tesis de Doctorado DIE (versión disco compacto). México: Departamento de Investigaciones Educativas del Cinvestav. 544p. ISBN 968-9020-04-8 (1000 ejemplares) (Tesis presentada el 29 de marzo de 2001).
- Block, David. (2007). Estudio didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la noción de fracción en la escuela primaria. Serie Tesis Maestría DIE (versión disco compacto) México: Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV, 246p. ISBN: 978-968-9020-05-9. (Tesis presentada el 11 de diciembre de 1988).

- Block Sevilla, David. (2022). *Más de uno, pero menos de dos. La enseñanza de las fracciones y los decimales en la educación básica*. México: Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV
- Brousseau, Guy. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación matemática*, 12(1), 5-38.
- Brousseau, Guy, Brousseau, Nadine. y Warfield, Virginia. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(1), 1-20.
- Castañó Torres, Yesenia. (2021). *Trabajo colaborativo entre profesores de secundaria e investigadores. Una experiencia en torno a la caracterización y congruencia de figuras geométricas*. México: Departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV.
- Dávila, Marta. (1992). El reparto y las fracciones. *Educación Matemática*, 4(1), 32-45. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-1/vol4-1-3.pdf>
- Desgagné, Serge, Bednarz, Nadine, Lebuis, Pierre, Poirier, Louise y Couture, Christine. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation: un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des Sciences de l'Éducation*, 27(1), 33-64.
- Freudenthal, Hans. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- Imvinkelried, María Laura. (2020). Las concepciones de los futuros docentes sobre la noción de fracción. [Tesis de maestría, Universidad Nacional del Litoral]. <https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/handle/11185/5712>
- Kieren, Thomas. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.) *Number Concepts and operations in the middle grades* (Vol 2, pp.



162-181). Lawrence Erlbaum Associates - National Council of Teachers of Mathematics.

Margolis, Fabiana, Montero, Barone, Ana, Varettoni, Marcos, Chelle, Maria Teresita, Echevarría, Karina. (2022). *Estrada a dúo 7. Prácticas del lenguaje. Matemática*. Boulogne: Estrada.

Saboya, Mireille. (2013). Vers la clarification d'un projet visant le développement d'une activité de contrôle chez les élèves. En Bednarz, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement* (pp. 69-76). Paris: Ed. L. Harmatan.

