



Algunas reflexiones en relación con la validación de una tarea de construcción geométrica que incorpora el GeoGebra al medio didáctico

Ana Inés Cocilova*

En este trabajo presentamos algunos hallazgos acerca de cierto uso del software GeoGebra en la resolución de una tarea de construcción geométrica, haciendo foco en los procesos de control y en los indicios de validación que aparecen en la clase. Estos análisis forman parte de una indagación realizada en un trabajo de tesis de maestría¹, cuyo objetivo principal es describir y analizar dialécticas de validación en la resolución de tareas geométricas, en el marco de un proceso de estudio que integra el uso de software de geometría dinámica en la formación de profesores de nivel inicial y de nivel primario. El proyecto tiene un alcance descriptivo, puesto que el propósito es describir y analizar las dialécticas de validación tal como suceden en los escenarios áulicos reales. Se propone un trabajo etnográfico de corte transversal. El caso que se estudia corresponde a la cátedra “Matemática” del Profesorado de Nivel Primario y del Profesorado de Educación Inicial del Departamento de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Sur. Los referentes empíricos provienen de observaciones realizadas en el curso intensivo de verano, que se presenta como una alternativa de cursado durante los meses de enero y febrero, para estudiantes que no pudieron aprobar el cursado de la asignatura en

1 Proyecto de tesis titulada “Dialécticas de validación en clases de matemática que integran el software GeoGebra. El caso de los estudiantes del Profesorado de Educación Primaria y de Educación Inicial de la Universidad Nacional del Sur”, del programa de Maestría en Procesos Educativos Mediados por Tecnología, del Centro de Estudios Avanzados (FCS-UNC), bajo la dirección del Mg. Aníbal Darío Giménez y la codirección del Dr. José Nicolás Gerez Cuevas.

* Maestría en Procesos Educativos Mediados por Tecnología, CEA, FCS, UNC - Departamento de Matemática - Departamento de Ciencias de la Educación, UNS / cocilova@uns.edu.ar

forma regular. Se observaron un total de diez clases, correspondientes a la unidad didáctica Geometría. Se recolectaron datos en formato audio y video de los momentos de socialización; grabaciones de pantalla de las producciones grupales de las estudiantes, y archivos de las producciones realizadas en el software GeoGebra. Estos datos se complementaron con un diario de campo. En este escrito particularmente nos concentraremos en algunos análisis sobre dos clases en las que se trabajó en torno a una tarea de construcción geométrica. El interés de analizar esta tarea es que permite indagar acerca de un cierto uso del GeoGebra, en el cual el mismo fue incorporado al medio didáctico en la propia gestión de la clase, dado que en principio la tarea se planteó para ser resuelta en un entorno de trabajo con lápiz y papel y, a partir de ciertos emergentes de la clase, fue retomada posteriormente en el entorno de trabajo del software GeoGebra.

Algunas ideas como punto de partida

Para iniciar este recorrido, podemos comenzar por notar que existe una tradición en la Didáctica de la Matemática respecto a la investigación en torno a la incorporación de diferentes tecnologías en los procesos de estudio de la matemática. Particularmente podemos destacar el caso de los llamados softwares de geometría dinámica entre los cuales se encuentra el GeoGebra. Estas incorporaciones no son neutras, sino que causan diferentes efectos en los procesos de estudio y en los saberes matemáticos que se ponen en juego. Por ejemplo, en Artigue (2011) se estudia el rol de las tecnologías en el estudio de la matemática, y se concluye que las mismas tienen no sólo una función pragmática sino también una función epistémica, “en el sentido de que nos ayudan a comprender los objetos matemáticos que movilizan (Artigue, 2011, p. 21). En Balacheff (2000) se expresa que “estos entornos modifican el tipo de matemáticas que se puede enseñar, el conjunto de problemas y las estrategias didácticas. El conocimiento profesional del profesor también debe cambiar” (Balacheff, p. 93, 2000).

Específicamente para el caso de la geometría, donde se ponen en juego procesos complejos tales como el visualizar, el dibujar, el construir, diferentes autores afirman que el empleo de los llamados softwares de Geometría Dinámica beneficia el aprendizaje de la geometría (De Villiers, 1996; Jones y Fujita, 2001, Royal Society, 2001) en tanto posibilitan la

construcción de representaciones dinámicas de figuras geométricas. Sin embargo, aún no hay evidencia de que las actividades en ambientes de geometría dinámica mejoren las condiciones para el desempeño de los alumnos en cuanto a la demostración, tal como se afirma en Sanchez y Sanchez (2003). En ese sentido Balacheff (2000) advierte que la evidencia perceptual que ofrecen este tipo de softwares puede provocar que los alumnos no vislumbren la necesidad de una demostración.

Estas cuestiones nos permitieron comenzar a problematizar el impacto de la incorporación de estos softwares como ayudas al estudio en el ámbito de la formación inicial de los profesores de nivel primario e inicial. Algunas de las preguntas que inicialmente nos planteamos son las siguientes: ¿Qué características tienen los procesos de validación y prueba en la resolución de tareas de geometría al incorporar el software GeoGebra al medio didáctico? ¿Cómo se distribuyen las responsabilidades en relación con la validación de las producciones matemáticas al incorporar el GeoGebra al medio didáctico? ¿Qué tipos de prueba viven en las clases de matemática cuando se incorpora el uso del software? ¿Cuáles son los beneficios que pueden identificarse en relación con la incorporación del software GeoGebra al medio didáctico, en post de propiciar el estudio de la validación como un objeto de enseñanza en la formación docente inicial de profesores de nivel Inicial y de nivel Primario?

Estos interrogantes nos permitieron delimitar el objetivo general de nuestra indagación: Analizar dialécticas de validación en el marco de una propuesta de enseñanza de la geometría que integra el uso del software GeoGebra, en la formación docente inicial del profesorado de nivel inicial y de nivel primario.

La concreción de dicho objetivo hace necesario alcanzar los siguientes objetivos específicos:

1. Describir las dialécticas de validación en la resolución de tareas geométricas en el marco de un proceso de estudio que integra el uso de software de geometría dinámica.
2. Identificar cómo se reparten las responsabilidades en relación con la validación de las producciones matemáticas en las clases de geometría.

3. Caracterizar la axiomática áulica sobre la cual se sustentan las dialécticas de validación en las clases de geometría cuando se incorpora el software GeoGebra al medio didáctico.

4. Evaluar los aportes de la incorporación del software GeoGebra sobre el desarrollo de las dialécticas de validación y a la actividad matemática en clases de geometría en la formación inicial.

Asumiendo como posición epistemológica una mirada antropológica de la actividad matemática (Chevallard, 1999), consideramos que es necesario analizar los procesos de creación y difusión de la matemática en el seno de las propias instituciones. Así propusimos la realización de un estudio de caso acerca de las clases de geometría dictadas en el marco de la materia “Matemática” perteneciente al plan de estudio del Profesorado de Educación Primaria y del Profesorado de Educación Inicial del Departamento de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Sur. Dentro de la asignatura “Matemática” en la que la investigación se sitúa, los procesos de validación y prueba se presentan como un objeto de enseñanza, tal es así que uno de los objetivos de la asignatura, tal como aparece en el programa de la materia, es “que los alumnos logren ampliar y profundizar los procesos de validación y control que llevan adelante a la hora de resolver actividades”. La validación es un componente esencial e intrínseco de la actividad matemática, por lo que su estudio es un puente para adentrarnos en el impacto de la tecnología en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática en general y de la geometría en particular.

La propuesta problematiza el empleo de la tecnología en los procesos de estudio de la geometría en el ámbito de la formación inicial del profesorado de educación primaria y de educación inicial, así es que consideramos que un primer nivel de impacto de la investigación puede darse en esa misma institución, dado que los emergentes del estudio serán posibles insumos que permitan cuestionar la formación matemática de los futuros maestros egresados de la Universidad Nacional del Sur. Un segundo nivel de impacto sería en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, la cual postula la necesidad de cuestionar la formación de profesores de todos los niveles educativos. Y, por último, la investigación abonaría los propios desarrollos tecnológicos ligados a la mediación en procesos educativos,

debido a que se trabajará con un software que ha sido diseñado con fines didácticos.

Acerca del trabajo de campo

Los referentes empíricos de la indagación provienen de observaciones no participantes que se realizaron durante el mes de febrero de 2023, sobre un total de 30 horas de clases. Las observaciones se realizaron en el contexto del dictado del curso intensivo de verano de la asignatura “Matemática” para estudiantes del Profesorado en Educación Inicial y del Profesorado en Educación Primaria, del Departamento de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional del Sur. El dictado intensivo en cursos de verano es una modalidad en la que se replica la asignatura con un dictado de cursado diario, durante los meses de febrero y mediados de marzo y que se ofrece como una alternativa para aquellos estudiantes que no han aprobado el cursado en forma regular durante el ciclo lectivo. En este curso, las sesiones de clases se organizaron en bloques de dos o tres horas de duración, de lunes a viernes. La cátedra estaba conformada por el profesor que habitualmente dicta la materia en el cursado regular, y por una ayudante de cátedra. La matrícula de estudiantes inscriptos al curso fue de 45 estudiantes, con una asistencia promedio de 33 estudiantes por semana. Se observaron todas las clases correspondientes a la unidad Geometría.

¿Qué datos se recolectaron?

Principalmente se recolectaron datos en formato de audio y video, y archivos de GeoGebra. Para el caso de los momentos de trabajo público (exposiciones del docente, momentos de discusión y de socialización) se empleó una cámara 360 que posibilitaba filmar la pizarra y parte del aula. Durante las sesiones de clase en las que se realizaron propuestas de trabajo en parejas y en pequeños grupos en el entorno de GeoGebra, se grabaron las pantallas de las computadoras de las estudiantes, así como también se registró el audio de las voces de cada grupo. Estos archivos se complementaron con los archivos en GeoGebra de las producciones de

los estudiantes. Todos estos datos se complementaron con un diario de campo elaborado durante las observaciones.

La sistematización de los datos

El gran caudal de datos obtenidos en el trabajo de campo hizo necesario en primer lugar tomar algunas decisiones que posibiliten la organización y la sistematización de estos. Para la realización del primer mapeo de los datos se creó una tabla hipermedial consistente en una tabla colaborativa organizada en tres columnas. La primera de ellas, denominada “Clases y links a videos”, registra la fecha de la clase y contiene enlaces a los registros de todos los videos que registran diferentes momentos de la clase, de modo de facilitar el acceso a los mismos. La segunda columna, denominada “Descripción de la clase”, contiene un punteo sintético de algunos aspectos generales de la clase, por ejemplo, la metodología de trabajo, los diferentes momentos de la clase (públicos, privados, individuales, en grupos), así como un registro de las consignas de las tareas que se trabajaron. En la tercera columna, llamada “Sobre la validación”, se identifican algunos momentos de la clase que resultan de interés para rastrear momentos de intercambio público que son considerados como relevantes para poder capturar los indicios de los procesos de control y validación. Se incorporan asimismo en la tabla enlaces a archivos de análisis y de desgravación de ciertos momentos de la clase, que corresponden a etapas de preparación de los datos.

Sobre los referentes teóricos

Antes de continuar con este recorrido, es necesario detenernos a poner luz acerca de algunos de los conceptos relevantes para nuestra indagación. Al aproximarnos a los procesos/dialécticas de validación en clases de matemática, es usual encontrar en la bibliografía una gran variedad de términos asociados, algunas veces empleados casi como sinónimos, y que en la práctica pareciera que se amalgaman unos con otros haciendo difusos los límites entre ellos. Nos referimos a vocablos tales como razonamiento, explicación, argumentación, control, prueba y demostración. ¿Cuál es el sentido de cada uno de estos términos? ¿Cuáles son las similitudes y alcances de cada uno de ellos? ¿Cómo se entranan los mismos en las dialécticas

de validación? En primer lugar, podemos comenzar acercándonos al concepto de razonamiento, puesto que al decir de Balacheff (2019) es en esta competencia que se sitúa la demostración.

El razonamiento:

...[es la] organización de proposiciones que se dirige hacia un enunciado objetivo para modificar el valor epistémico que este enunciado objetivo tiene en un estado de conocimiento dado, o en un medio social dado, y que, en consecuencia, modifica su valor de verdad cuando se cumplen ciertas condiciones particulares de organización. (Duval, 1992, p. 52, en Balacheff, 2019, p. 4, traducción propia).

Podemos notar que, en esta definición, Balacheff y Duval enfatizan el papel del valor epistémico, el cual se refiere a “el grado de certeza o convicción que se atribuye a una proposición” (Duval, 1991, p. 254, en Balacheff, 2019, p. 4, traducción propia). Es decir, que la certeza de una proposición no sería un atributo intrínseco a la misma, sino que es algo que es atribuido por un otro. A su vez, podemos notar el carácter situado que tiene este proceso, lo cual podríamos decir que responde a la relatividad institucional de la actividad matemática. El razonamiento nos lleva a ingresar en la problemática de la explicación, que es un término que parece ser controversial en la bibliografía por sus relaciones con la prueba y la demostración. La explicación se da fuertemente en la esfera de lo privado, actuando sobre los objetos y relaciones (Balacheff, 2019). Pero trasciende además a la esfera de lo público, debido a que la explicación permite organizar algo dentro de un sistema de conocimiento, por lo que es un término que se vincula fuertemente con la prueba y la demostración. Cuando aparece la intención de producir un discurso para convencer a otro (ya saliendo de la esfera de lo privado), ahí pasamos a la argumentación:

La expresión argumentación matemática puede significar al menos un argumento potencialmente admisible con respecto a las normas de la clase de matemáticas. No es inmediatamente una demostración, pero puede serlo si es reconocida como tal por la clase y confirmada por el profesor. (Balacheff, 2019, p. 31, traducción propia)

Hay también una componente crítica en la argumentación, en tanto nos permite anticipar objeciones y desacuerdos acerca de las ideas en juego. Cuando la argumentación es aceptada por otros, se convierte en una prueba:

Una prueba es un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de una afirmación matemática, con las siguientes características: 1. Utiliza afirmaciones aceptadas por la comunidad de la clase (conjunto de afirmaciones aceptadas) que son verdaderas y están disponibles sin más justificación; 2. Emplea formas de razonamiento (modos de argumentación) que son válidas y conocidas por la comunidad de la clase, o que están a su alcance conceptual; y 3. Se comunica con formas de expresión (modos de representación de los argumentos) que son apropiadas y conocidas por la comunidad del aula o que están a su alcance conceptual. (Stylianides, 2007, p. 291; en Balacheff, 2019, p. 31, traducción propia).

Habrá así mismo argumentaciones que no serán aprobadas colectivamente, en cuyo caso quedarán a un nivel de conjeturas.

Cuando la prueba cumple con ciertas características normativas, es aceptada como una demostración, en el sentido de una prueba matemática. Acerca de la demostración podemos decir por un lado que es “la herramienta canónica de demostración en matemática”. Sin embargo, Balacheff (2019) advierte que, debido a su alto costo, no puede ser el medio exclusivo de validación en el aula. Aquí entonces podemos notar que existen diferencias entre lo que es validar en el contexto de la matemática como disciplina, y lo que comprende el validar en el ámbito de una clase.

También vinculado a la validación y a la prueba, aparece otro término vinculado a los mismos, nos referimos al control: “Llamaremos proceso de control al proceso de anticipar la validación”. (Margolinas, 1993, p. 213, en Balacheff, 2019, p. 19, traducción propia). El control, para esta autora, juega un rol muy importante en el contexto de la resolución de un problema, en tanto permite al estudiante tomar decisiones respecto a las estrategias que pone en juego, permitiendo que sus argumentaciones evolucionen desde pruebas empíricas hacia pruebas formales. Esto permite notar cómo se entran en la práctica la resolución de un problema y la validación de este, rompiendo con una idea ingenua de linealidad entre

ambos procesos, no se relega a la validación como una “fase” que se da al finalizar el proceso de resolución.

Hacia la construcción del objeto de estudio

Una vez concluida la fase de mapeo general de los datos, se comenzó con los análisis en profundidad de los datos. Aquí nos interesa mencionar que este es un momento que exigió la toma de diferentes decisiones en función de los objetivos perseguidos por la indagación. En nuestro caso, algunas de las cuestiones que tuvimos que resolver fueron las siguientes: ¿en qué orden se realizarán los análisis más puntuales? ¿se priorizarán los datos vinculados con los momentos de intercambio público o privado? En un primer acercamiento a los datos, con una mirada ingenua acerca del concepto validación, priorizamos el análisis casi exclusivo de aquellos momentos de la clase en los que se realizaban intercambios públicos. Luego de algunos debates teóricos que nos permitieron recuperar la relevancia del concepto de control, vislumbramos la necesidad de complementar los análisis realizados con lo que sucedía en la esfera de lo privado. Esta dialéctica entre lo público y lo privado, consideramos que puede ser un acercamiento superador al sentido otorgado a la validación en el recorrido hecho hasta el momento en nuestra indagación. Es interesante notar que este proceso de revisión de la toma de decisiones es propio de la *lógica dialéctica o compleja* de investigación (Achilli, 2005) a la que adherimos desde nuestro posicionamiento metodológico para nuestra investigación. Lejos de ser un proceso lineal, la construcción del objeto es un proceso vivo y dinámico, que va modificándose/transformándose/nutriéndose solidariamente con la emergencia de (nuevas) preguntas, de ciertos hallazgos, y de algunos obstáculos que aparecen en el camino, a medida que se ponen en diálogo datos, conceptos, miradas e interpretaciones.

Iniciando el proceso de análisis

En este apartado recuperamos algunos análisis sobre dos sesiones de clase en las que se trabajó en torno a una tarea de construcción geométrica. El interés de analizar esta tarea es que permite indagar acerca de un *cierto uso* del GeoGebra, en el cual el software fue incorporado al medio didáctico en la propia gestión de la clase, dado que en principio la tarea se planteó

para ser resuelta en un entorno de trabajo con lápiz y papel y, a partir de ciertos emergentes de la clase, fue retomada posteriormente en el entorno de trabajo del software GeoGebra.

Las clases analizadas versaron en torno a la siguiente tarea: “Dada una recta y un punto fuera de ella, trazar una recta perpendicular [a la misma] que pase por el punto”.

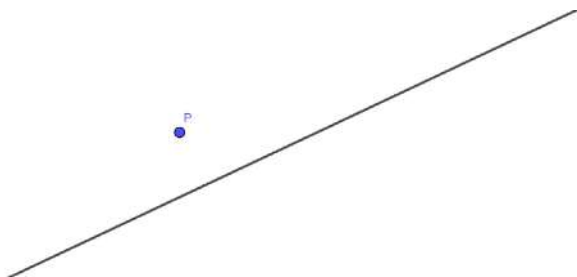


Imagen 1. Título: Datos dados a partir de los cuales se debe realizar la tarea de construcción geométrica. Fuente: Elaboración propia.

Se trata de una tarea de construcción geométrica, esto es, aquellas construcciones de la geometría euclídea que se realizan a partir del trazado de rectas y circunferencias a partir de un conjunto de objetos dados (Gentile, 1987). Las subtarefas que pueden realizarse en este tipo de tareas son las siguientes:

- Trazar una recta con la regla no graduada, a partir de dos puntos dados;
- Trazar una circunferencia con el compás, a partir de un centro y un punto, o de un centro y un radio (determinado por un segmento dado);
- Hallar los puntos de intersección entre dos objetos dados (por ejemplo, entre dos rectas, o entre una circunferencia y una recta, etc.).

Todo objeto ya construido puede usarse para construir nuevos objetos a partir del mismo.

En la imagen 1 pueden visualizarse los datos dados a partir de los cuales debe realizarse la construcción para la tarea en cuestión, con el empleo del compás y de la regla no graduada.

En las clases observadas esta tarea formaba parte de una secuencia de tareas previas, las cuales consistieron en las siguientes construcciones: “dado un segmento trazar la mediatriz de este”, “dado un segmento trazar una recta perpendicular al mismo”, y “dada una recta trazar una recta perpendicular a la misma”.

A continuación, describiremos cómo se gestionó la clase y el medio didáctico en las dos clases que analizamos.

En las clases observadas, la metodología de trabajo observada era el formato taller en la que se propiciaba la discusión de ideas y la construcción colectiva de conocimientos. Esto va en línea con lo expresado por el profesor en el programa de la asignatura, donde se indica lo siguiente en el apartado “Metodología”:

Con la finalidad de constituir una Comunidad de Estudio (Chevallard, 2013), el trabajo estará organizado con modalidad aula taller. En la cual, a partir del estudio de problemas, intra y extra-matemáticos (que permitan el abordaje de la organización matemática de referencia (Chevallard, 1999), los alumnos deben desarrollar tareas de investigación que les permitan involucrarse en un aprendizaje autónomo y continuo para construir respuestas provisionales cuya validación estará a cargo de la comunidad de estudio. En este sentido el docente se constituirá en un medio más entre las medias (Chevallard, 2013) que circulan en el aula. [tomado del programa de la asignatura “Matemática”²]

En el extracto anterior puede notarse la explicitación del posicionamiento del docente con respecto a la metodología de trabajo y a la validación de las producciones que se produzcan en el aula.

2 Disponible en https://apps.uns.edu.ar/programas_materias_autorizados/ED/206.pdf

Acerca del medio en el entorno de lápiz y papel

El trabajo áulico se realizó en forma individual, aunque algunas estudiantes conformaron pequeños grupos de trabajo en forma espontánea. En relación con el medio didáctico, se trabajaron las construcciones geométricas sobre hojas de papel liso, empleando regla no graduada y compás. En los momentos de intercambio público, se compartieron las producciones en el pizarrón, con el empleo de útiles de geometría para pizarra.

Además de la construcción geométrica planteada, se dejó indicada la consigna de que cada estudiante debía escribir todos los pasos de la construcción realizada, que era llamado “protocolo de construcción” por el grupo clase. Luego se realizó una puesta en común de la actividad, adoptando la siguiente dinámica: una estudiante daba lectura de su protocolo de construcción, y, en simultáneo, otra estudiante iba realizando los pasos indicados en el pizarrón, usando regla y compás para pizarra. Esta dinámica permitía el ajuste de los protocolos.

Acerca del medio en el entorno de GeoGebra

Se retomó la tarea de construcción geométrica, incorporando el GeoGebra al medio didáctico. En el GeoGebra se restringió el uso a la Vista Gráfica, y se ocultaron los ejes cartesianos y la cuadrícula que por defecto aparecen visibles en la interfaz del software. Se excluyó el uso de la herramienta “construcción de una recta perpendicular por un punto dado”.

El trabajo áulico se llevó a cabo en pequeños grupos, armados en forma espontánea por las estudiantes, y se fueron realizando diferentes momentos de socialización de las producciones de GeoGebra en la pizarra digital haciendo uso de un proyector.

¿Qué características específicas adquiere el medio didáctico al incorporar el software GeoGebra?

Los objetos construidos en GeoGebra tienen ciertas características específicas debido a la mediación del software. Acosta Gempeler (2007) se refiere a estos objetos con el término “ostensivos computarizados”. Los objetos construidos se vinculan mediante una relación de dependencia entre ellos, pudiendo distinguir entre: objetos libres (que no dependen de

otros), y objetos fijos, que fueron contruidos a partir de ciertas relaciones de dependencia con otros. Es el caso de, por ejemplo, “el punto medio de un segmento”, “la mediatriz de un segmento”, “el centro de una circunferencia”. Acosta Gempeler (2007) plantea que estos ostensivos

se caracterizan porque en su manipulación intervienen acciones que no provienen de los sujetos, sino de la programación de la que son producto. Es decir que en dichos objetos computarizados se encuentra encapsulada una praxeología matemática, producto de la transposición informática de una organización matemática determinada. Como resultado de ese encapsulamiento, las técnicas de la praxeología informatizada se presentan como “cajas negras”, en las que sólo son visibles las entradas y los resultados. (p. 86).

En cuanto a la construcción de los objetos, el GeoGebra ofrece varias herramientas que permiten construir objetos a partir de otros, por ejemplo, dados dos puntos nos permiten construir el punto medio entre ellos. Estas herramientas mantienen ocultas las técnicas de construcción al usuario. Es pertinente preguntarnos acerca del impacto que tiene esto sobre los procesos de estudio de la geometría, pues podrían tornarse transparentes ciertas técnicas de resolución de tareas. ¿Qué impacto puede tener esto en las concepciones de los estudiantes acerca del quehacer matemático? ¿Qué consecuencia tendrá esto sobre los procesos de validación y control por parte de los estudiantes?

A su vez, estos ostensivos computarizados pueden ser manipulados por el usuario a partir de diferentes herramientas de desplazamiento: al arrastrar un objeto libre, todos los objetos fijos que dependen de dicho objeto se desplazan manteniendo las propiedades bajo las cuales fueron contruidos. Esto permite diferenciar los objetos en tres categorías en cuanto a la posibilidad de desplazamiento que admite cada uno de ellos: los objetos libres, que pueden ser desplazados por cualquier sector de la ventana gráfica; los objetos creados a partir de la herramienta “punto en objeto”: pueden desplazarse únicamente sobre el objeto en el que fueron creados; y los objetos fijos: no pueden ser desplazados directamente, aunque se desplazan como consecuencia del desplazamiento de los objetos de los que dependen.

Asociada a la idea del desplazamiento, o arrastre, aparece la noción de “buena construcción”. Hay una restricción que es propia del trabajo en el entorno del GeoGebra, que expresa que una construcción en GeoGebra estará bien realizada, en tanto sea resistente al arrastre, aplicado sobre cualquiera de sus puntos libres. Esto significa que la figura conserve sus propiedades esenciales al arrastrar cualquiera de sus puntos libres. Podemos notar que el desplazamiento es un trabajo que se basa fuertemente en la percepción y que no deja de ser un trabajo manipulativo sobre un número de (muchos) casos finitos. ¿Qué vínculos hay entre la noción de “buena construcción” y los procesos de validación y control de las construcciones? ¿Qué impacto tiene el desplazamiento en los procesos de control y en la validación de las producciones realizadas en el estudio de la geometría? ¿Es posible traccionar este trabajo perceptivo hacia pruebas formales?

Al realizar una construcción en GeoGebra, puede reconstruirse la misma por medio del Protocolo de Construcción, que es una tabla que contiene los diferentes pasos de la construcción realizada. En el protocolo de construcción no queda registrado el uso de las herramientas de desplazamiento, por lo que el protocolo puede ser de utilidad para reconstruir el paso a paso de una construcción, pero no para retener el uso de las herramientas de desplazamiento que ofrece el software.

La preparación de los datos

Para realizar este análisis, y debido a las características de los datos, fue necesario trabajar sobre los mismos de modo no perder información valiosa en relación con los fines perseguidos por nuestra indagación. Así fue como en primer momento se procedió a desgrabar los videos de las clases en las que se socializaron las producciones en torno a esta tarea. Aquí aparece un desafío a nivel metodológico, que es que al desgrabar la clase no nos interesa únicamente recuperar los discursos orales, dado que los mismos se refieren a ciertas tareas de construcción geométrica, las cuales se producen primero con el uso de la regla y el compás, sobre hoja lisa (o sobre la pizarra), y luego en el entorno del software GeoGebra, es decir, que configuran el discurso (oral u escrito), con ciertas tareas instrumentales, con el trazado de dibujos y símbolos, y con el uso de las diferentes herramientas del software. A su vez, debido a que la indagación se realiza

en torno a los procesos de validación, no podemos desatender a los gestos que realizan docentes y alumnos, que acompañan ya sea enfatizando, reafirmando o refutando las diferentes explicaciones y argumentaciones que se dan en la clase. Esto requirió elaborar un documento en el que se van intercalando las transcripciones de los diálogos con imágenes de los dibujos sobre los que se refieren y con descripciones de las acciones y/o gestos de actores, que fueron identificados en el registro en video.

Algunas dificultades para visualizar las construcciones en GeoGebra que fueron proyectadas en pantalla requirieron realizar reconstrucciones en GeoGebra de las algunas producciones socializadas, las cuales replican las construcciones que fueron socializadas en las clases analizadas.

Primeros análisis

A partir de las ideas previas que hemos ido recuperando intentaremos ahora develar las tramas de la validación en las dos clases objeto de este análisis: pareciera que es en los momentos de intercambio público de las clases donde podremos buscar indicios acerca del valor epistémico que se le atribuye o no a las proposiciones que circulan en los discursos de las estudiantes y del docente, y que forman parte de los diferentes razonamientos que se ponen en juego, algunos de los cuales, tras ser aceptados, se constituirán en pruebas. Sin embargo, hay componentes neurales de la validación, como la explicación y el control, que no necesariamente acceden al ámbito de lo público, por lo que desentramar los indicios de validación en las clases analizadas, nos llevará también a indagar en los momentos de trabajo privado que tuvieron lugar en las clases observadas.

Para organizar el análisis, vamos a separar el mismo en dos momentos: el primero de ellos, lo denominaremos “Entorno de lápiz y papel”, y el segundo momento, “Entorno de GeoGebra”.

Del primer momento: entorno de lápiz y papel

En los primeros minutos de trabajo el profesor realizó algunas indicaciones que remiten principalmente a cuestiones del quehacer geométrico esperado en esa clase. El profesor aclaró “vos tenés que asegurarte que es perpendicular, no a simple vista” [registro de la clase 9/2], puede verse ahí

una indicación que intenta deshabilitar el trabajo perceptual para validar las diferentes producciones.

En la clase circularon dos técnicas diferentes de construcción, que describiremos a continuación:

Sobre la primera técnica

La primera de estas técnicas comprende las siguientes subtareas: determinar sobre la recta m dos puntos que equidisten del punto P ; construir la mediatriz de un segmento.

Es decir, dado una recta m y un punto P fuera de ella, primero se determinan dos puntos D y E sobre la recta m que equidisten de P (ver imagen 2), los cuales se obtienen intersectando la recta dada con una circunferencia con centro en P y radio mayor que la distancia entre la recta y el punto. La recta buscada se obtiene trazando la mediatriz del segmento formado por los puntos D y E .

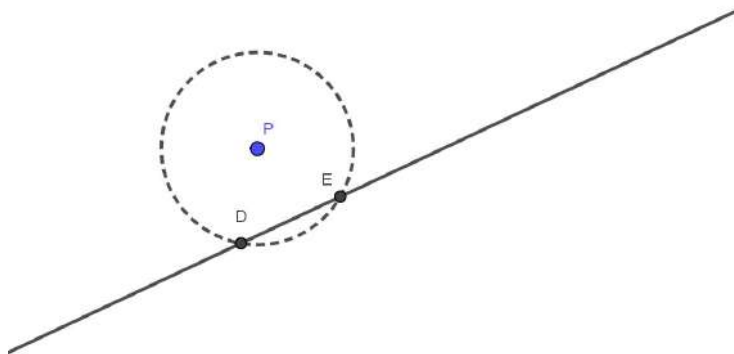


Imagen 2. Título: Determinación de dos puntos sobre la recta dada que equidistan del punto dado empleando una circunferencia con centro en el punto dado. Fuente: Elaboración propia.

En el discurso tecnológico que circuló en el aula hay evidencias de explicación y de control, esto lo vemos cuando la estudiante que propone la construcción afirma respecto a cómo debe trazarse la circunferencia

auxiliar: “una circunferencia, que no aclaré, que sea de un tamaño que intersecte con la recta m . O sea que sea mayor que la distancia” [registro de la clase 9/2]

Esta técnica pudo ser validada por la comunidad aula desde conocimientos y propiedades geométricos. La validez de la construcción se apoya a partir del hecho de que el segmento determinado por los puntos D y E forma con el punto dado un triángulo isósceles (ver imagen 3), y en el triángulo isósceles, la mediatriz de la base coincide con la mediana y la altura. Las estudiantes validan la obtención del triángulo isósceles por la propia construcción, tal como vemos en el siguiente intercambio, en el cual justifican la congruencia de los lados del triángulo de vértices D , E y P :

Alumna: Porque ambos tienen la misma distancia, D tiene la misma distancia a P y E tiene la misma distancia a P . Por el radio

Profesor: ¿Por qué?

Alumna: Porque es una circunferencia, y los puntos equidistan. [registro clase 9/2]

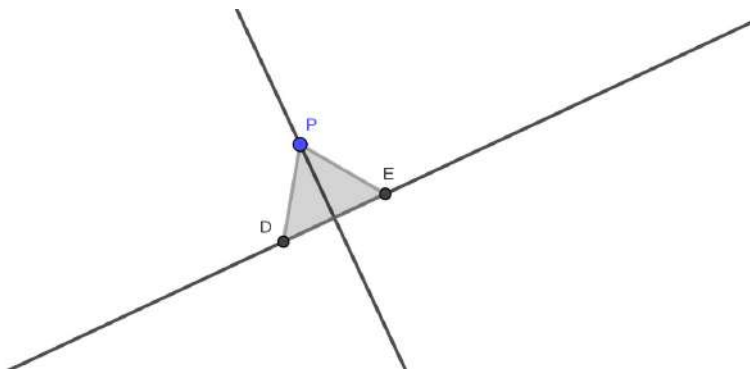


Imagen 3. Título: Triángulo isósceles al que refieren las estudiantes en su argumentación. Fuente: Elaboración propia.

Sobre la segunda técnica

En esta clase circuló una segunda técnica, que llamaremos la “técnica de Carolina”, que fue propuesta por la alumna Carolina³ cuestionando el discurso tecnológico sobre el que se sustentaba la validez de la técnica anterior. La propuesta de Carolina era que se podía trabajar a partir de determinar dos puntos cualesquiera sobre la recta dada, sin que tengan que equidistar con P. En el siguiente diálogo, podemos ver cómo Carolina propone su técnica:

Profesor: ¿Y por qué yo quiero un triángulo isósceles?

Carolina: Esa era mi pregunta. Se puede hacer, creo, también ¿o no?

Profesor: No sé, no sé.

Carolina: Yo pude hacer, no con la mediatriz siempre sino buscar solamente una perpendicular para ver si se podía. Entonces busqué una circunferencia que sea mayor que la mitad del segmento, por ejemplo, una circunferencia más grande y otra más chica que se intersectaran, que igual me quedaba perpendicular, pero no era necesariamente la mediatriz. Y ese sería el caso también, podría ser. ¿O no? ¿Podría ser? [registro clase 9/2]

La técnica de Carolina se basa en determinar dos puntos cualesquiera sobre la recta dada, y trazar dos circunferencias con centro en ellos y que pasen por el punto dado P. La recta que pasa por los puntos de intersección de estas circunferencias es la recta buscada (ver imagen 4).

3 Los nombres de los estudiantes han sido modificados para resguardar la identidad de estos.

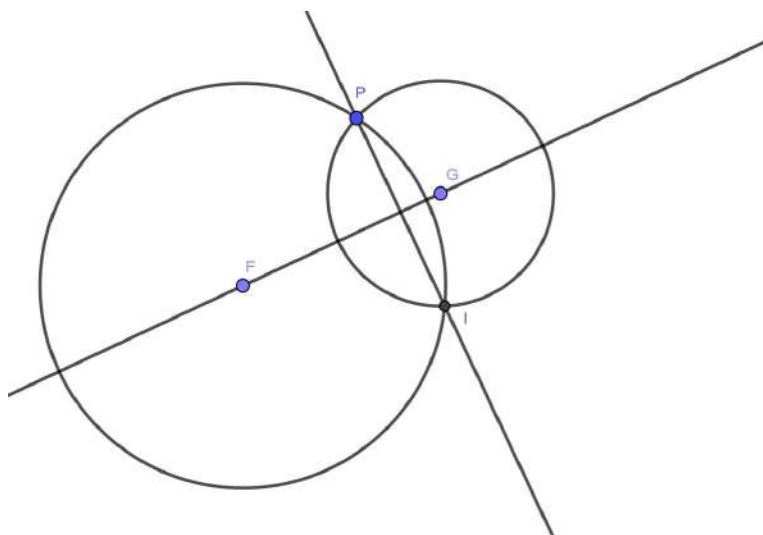


Imagen 4. Título: Construcción propuesta por la alumna Carolina.

Fuente: Elaboración propia.

La técnica de Carolina pudo ser constatada de manera empírica en la clase, recurriendo al uso de la escuadra, pero no pudo ser validada formalmente por la comunidad áulica.

A partir de esta imposibilidad de avanzar en argumentaciones que den cuenta de la validez de la técnica, el profesor decide dejar abierto el problema de aceptar o no la validez de esta técnica, indicando que se retomará la misma en el entorno de GeoGebra. Puede notarse en el discurso del profesor el valor que le otorga a la inclusión del software en términos de ayudas al proceso de la validación:

Profesor: La semana que viene nosotros vamos a trabajar con GeoGebra. Si, y entonces por ahí cuando trabajemos con GeoGebra, por ahí nos permita pensarlo más, explicarlo, para poder hacer muchos dibujitos. Y ahí ver si es verdad o es mentira, si nos está mintiendo a todos. ¿Sí? [registro de la clase 9/2]

Notemos que la técnica de Carolina puede entenderse como una ampliación de la primera técnica, aunque esto no fue concebido así por la comunidad clase. Esta ampliación de la técnica podría haberse dado en forma natural si quizás hubieran circulado en la clase otros sentidos de la mediatriz. Por ejemplo, el haber pensado a la mediatriz como eje de simetría en lugar de como lugar geométrico, hubiera permitido despegarse de la búsqueda de triángulos isósceles para permitir advertir la simetría presente en la configuración de las figuras que conforman la segunda construcción.

Del segundo momento: entorno de GeoGebra

En esta clase se trabajó en el entorno de GeoGebra. En primer lugar, en grupo, las estudiantes resolvieron la tarea de construcción planteada. Luego de un tiempo, se trabajó en la búsqueda de una prueba que permita analizar la validez de la construcción propuesta por Carolina. Carolina socializó su construcción a la comunidad áulica, haciendo uso del proyector. En su relato, fue narrando el paso a paso realizado mencionando las herramientas de GeoGebra empleadas. Luego de esto, Carolina formuló algunos argumentos que intentaron explicar y validar su construcción, aunque no lograron convencer a la comunidad áulica. Para justificar su construcción, Carolina sostiene su argumento en la altura de un triángulo, tal como se aprecia en el siguiente diálogo:

Carolina: Estas son las dos rectas que tomé, que justamente con la recta y el segmento que tomé de la forman un triángulo, esta sería la base del triángulo, ¿se ve?

Otros Alumnos: Sí.

Carolina: Y esta recta sería perpendicular y lo argumento porque es la altura del triángulo que tomé y es perpendicular a la base. [Registro clase 15/2].

En ese momento hubo algunos problemas de visualización por problemas de baja nitidez del proyector del aula y de iluminación del ambiente: no eran visibles en la pantalla la totalidad de las imágenes de GeoGebra



que sí eran visibles desde la pantalla de la computadora. Esto obligó a Carolina a modificar la apariencia de los objetos construidos, incluyendo el uso del color y el grosor de los trazos.

Una vez saldado este problema, el grupo clase desestima el argumento de Carolina ya que el mismo supone como válido la afirmación que intenta demostrar.

El profesor tensiona ese argumento a partir de la siguiente intervención “acuérdense que siempre uno puede trazar puntos que no estén o sea que no estén marcados pero que si sepamos o sea que no estén marcados pero que sí tengamos ciertas precisiones o ...” [registro clase 15/2]. A partir de esta intervención aparecen en escena algunos triángulos auxiliares (imagen 5) que permiten identificar luego un romboide en la figura. Finalmente, logran argumentar la perpendicularidad de ambas rectas (la dada y la construida) apoyándose en una propiedad de las diagonales del romboide.

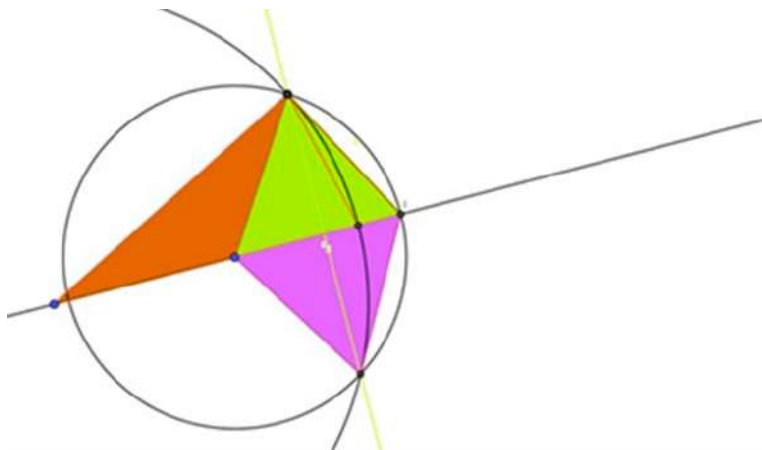


Imagen 5. Título: Algunos de los triángulos auxiliares que se emplearon en la argumentación. Fuente: Elaboración propia.

Algunas observaciones e interpretaciones a partir de los intercambios públicos

- La posibilidad de modificar la apariencia de los objetos visibles en la pantalla hizo que en los intercambios públicos tanto los estudiantes como el docente recurran a atributos perceptuales para referirse a los objetos geométricos, abandonado el uso de la notación formal que venían usando previamente en el entorno de lápiz y papel. Compartimos el siguiente diálogo entre Carolina y otra alumna a modo de ejemplo:

Alumna: ¿Puede ser también cuando pasa la recta amarilla como que también es perpendicular a la parte violeta de este lado?

Carolina: ¿Esto con esto? [Carolina señala en pantalla]

Alumna: Eso amarillo no con el otro, ese [la alumna le da indicaciones a Carolina respecto de cuál segmento se está refiriendo]

Carolina: ¿Con este?

Alumna: Sí.

Profesor: ¿Es perpendicular ahí?

Alumna: Ahh no ¡¡nada que ver!! [Registro clase 15/2]

Esta posibilidad de modificar la “apariencia” del trazo de los objetos en pantalla, es decir, la posibilidad de modificar su color, su tipo de trazo (continuo, punteado, etc.), el grosor del trazo, la opacidad en el caso de regiones poligonales) puede ser tomado en forma ingenua como una posible ayuda a la visualización. Sin embargo, estos indicios podrían indicar que es una cuestión que habría que analizar en profundidad en términos de ayudas al estudio.

-Los problemas de visibilidad producidos por el proyector y la iluminación del aula provocaron que lo que ve en pantalla la persona que comparte su producción pueda no ser lo mismo que ve el resto de la comunidad. Es un condicionante a ser tenido en cuenta en este tipo de clases en la cual la modalidad exige el poder mirar la pantalla en la que se están

proyectando las diferentes producciones sobre las que versa las discusiones que suceden en esa clase.

-En los momentos de intercambio público, tanto los estudiantes como el docente, plantearon un trabajo estático con las figuras. No fueron usadas herramientas de desplazamiento [como elige y mueve, punto en objeto, deslizadores, etc.]. Es decir, que el tipo de trabajo que se hizo presente en esta clase se corresponde con un trabajo que no difiere del trabajo que se podría haber realizado en el entorno de lápiz y papel. Asimismo, tampoco hay evidencias acerca de un trabajo sobre si las construcciones que se realizaron serían o no “buenas construcciones”, en el sentido de que resistan o no el arrastre.

- Respecto a la validación que fue aceptada por la comunidad clase, podemos notar que en la misma se consideró únicamente un caso particular en el cual los puntos que se toman arbitrariamente sobre la recta dada se encuentran en diferente semiplano con respecto a la recta que se quiere construir. El empleo de herramientas de desplazamiento sobre estos puntos podría haber puesto en escena otros casos, obligando a ajustar los argumentos movilizados para el caso en que no pueda recurrirse a propiedades del romboide, tal como puede apreciarse en la imagen 6. Incluso podría haber aparecido en escena el caso en el que los puntos equidisten del punto dado, lo que llevaría a vincular esta técnica con la primera que circuló en la sesión anterior de clase, viendo a la primera técnica como un caso particular de la técnica de Carolina.

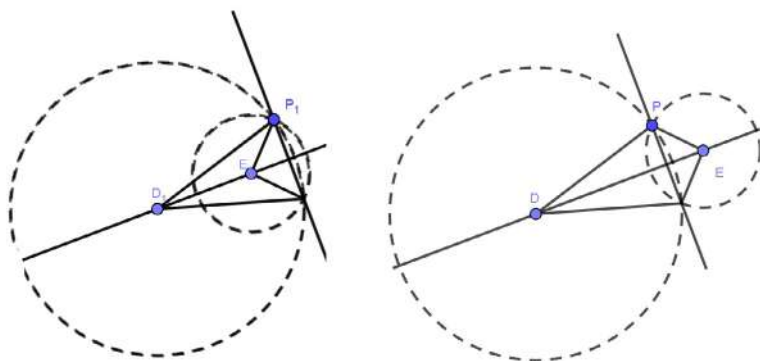


Imagen 6. Título: Diferentes posiciones en la elección de los puntos arbitrarios sobre la recta dada. Fuente: Elaboración propia.

Ampliando la mirada

El tratamiento estático de los objetos geométricos construidos con el software GeoGebra que tuvo lugar en este episodio de clase nos sorprendió, y nos llevó a preguntarnos qué había sucedido con el uso del arrastre en el trabajo al interior de los grupos. Para esto, recurrimos a recuperar los datos referidos a las instancias de trabajo privado de esta sesión de clase. Contábamos con los archivos de las producciones de GeoGebra, y con videos de grabaciones de las pantallas y audio del trabajo al interior de cada grupo. Debido a que en los protocolos de construcción de GeoGebra no queda rastro del trabajo con herramientas de desplazamiento, nos decidimos por comenzar a analizar los videos grupales.

Al analizar los videos con los registros de las grabaciones de las pantallas, observamos que el arrastre fue usado de diferentes maneras al interior de los grupos: algunos grupos lo usaron y otros no. A continuación, compartimos algunos hallazgos obtenidos al analizar las técnicas que las estudiantes emplearon para realizar la tarea de construcción en el entorno del GeoGebra.

-En principio podemos notar que ciertas características del funcionamiento del software hacen que las técnicas aceptadas como válidas por

la comunidad clase en el entorno del lápiz y papel, puedan no serlo en el entorno de GeoGebra, debido a que el control al que deben ser sometidas las construcciones para que las mismas resistan el arrastre, difiere del control necesario para trabajar en el entorno del lápiz y papel. Compartimos algunos ejemplos para ilustrar estas ideas.

Para el caso de la primera técnica de construcción que hemos analizado, la subtarea “determinar dos puntos sobre la recta dada que equidisten del punto dado P ” es realizada por las estudiantes a partir de “trazar una circunferencia cuyo radio es mayor que la distancia a la recta”. La expresión “cuyo radio es mayor que la distancia a la recta” funciona como una anticipación que permite asegurar la existencia de los dos puntos buscados, ya que garantiza que la recta sea secante a la circunferencia. Observemos que es un control que en la práctica se ejecuta a partir de un control perceptivo, tomando una apertura del compás que perceptualmente se advierte mayor que la distancia del punto a la recta. ¿Qué sucede cuando las estudiantes replicaron este protocolo en el entorno del software? Observamos que la ejecución de esa sentencia en el software se realizó mediante el uso de diferentes herramientas en diferentes grupos, dando lugar a construcciones que no necesariamente resisten el arrastre:

-En el caso de estudiantes que emplearon la herramienta “Circunferencia (centro, punto)”, tomando un punto C sobre el semiplano opuesto al que contiene al punto dado, basándose únicamente en el control perceptual, la construcción obtenida no resiste el arrastre, dado que el radio de la circunferencia satisface la desigualdad requerida solo para algunos casos particulares. Notemos que el punto C es exhibido por el software en color azul, lo que significa que tiene estatus de ser un punto libre, es decir, que puede moverse libremente por todo el plano, tal como se aprecia en la imagen 7. Sin embargo, este hecho pasa desapercibido por los estudiantes. En la imagen 8 puede verse una reconstrucción de la construcción realizada, y se ve asimismo otra posición del punto C en la cual la construcción desaparece.

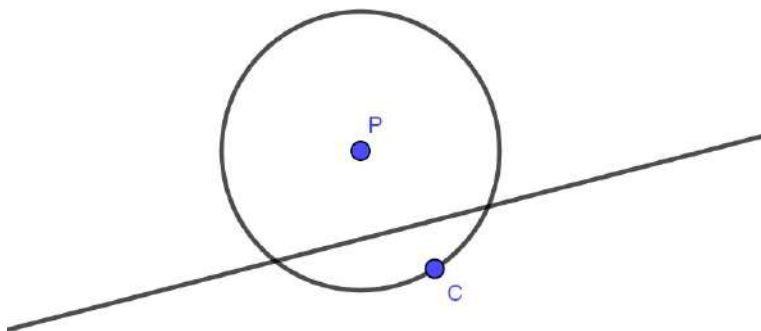


Imagen 7. Título: Construcción de la circunferencia en la que el punto C es un punto libre. Fuente: Elaboración propia.



Imagen 8. Título: Diferentes estados de la construcción realizada a partir de diferentes posiciones del punto C. Fuente: Elaboración propia.

-Otro grupo ejecutó esta tarea tomando el punto C sobre la recta. De esta forma, la construcción obtenida resiste el arrastre, puesto que el punto C solo puede moverse sobre la recta dada.

-En algunos casos, la no resistencia al arrastre no es percibida por los estudiantes ya que al mover el punto solo lo hacen una región del plano para el cual la desigualdad sigue siendo válida. Esto es un indicio de la

complejidad que tiene el dominio del empleo del arrastre en el entorno del software.

-En algunos casos, algunos estudiantes incorporaron parcialmente la información que el arrastre les brinda a sus discursos tecnológicos al interior del grupo, aunque estos argumentos no se hicieron públicos luego, ni tampoco fueron traídos a escena por parte del docente. Nos preguntamos si esta ausencia del trabajo con el desplazamiento en los momentos de intercambio público tiene que ver con la legitimidad que este tipo de técnicas tiene dentro de las concepciones respecto del quehacer matemático en esta comunidad.

A modo de cierre

En este escrito hemos realizado un recorrido por los primeros avances de un trabajo de tesis de maestría, cuyo problema de estudio presentamos brevemente en el primer apartado del capítulo. A continuación, recapitulamos algunas de las decisiones metodológicas que permitieron avanzar en la construcción del objeto de estudio, para lo cual describimos el proceso de recolección de los datos, sintetizamos algunos de los constructos teóricos que forman parte de los referentes teóricos de nuestra indagación, y por último presentamos algunos hallazgos en relación con el análisis de una tarea de construcción geométrica. Esto nos permitió establecer algunas comparaciones entre el trabajo en el entorno de lápiz y papel y en el entorno del software GeoGebra. Esta aproximación a los datos permitió reconocer algunas primeras recurrencias y regularidades en las sesiones de clase analizadas, pudiendo identificar algunos indicios de argumentación, de control y de diferentes tipos de pruebas que circularon en esas clases. A su vez pudimos identificar algunas tensiones y problemáticas asociadas a las características del medio didáctico al incorporar el trabajo con el desplazamiento y que han dado lugar a varias preguntas que al momento siguen abiertas en nuestra indagación, y que nos convocan a seguir indagando en este momento en los diferentes usos del arrastre en relación con los procesos de control y de evolución de las diferentes pruebas que permiten validar o invalidar el trabajo en el estudio de la geometría.

Como trabajo a futuro nos proponemos realizar el análisis de otros tipos de tareas que tuvieron lugar en las clases observadas, de modo de

poder analizar el impacto que otros usos diferentes del GeoGebra tiene en la validación y el control.

Referencias

- Achilli, Elena (2005). *Investigar en antropología social. Los desafíos de transmitir un oficio*. Rosario: Laborde Libros Editor.
- Acosta Gempeler, Martín Eduardo (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En Ruiz Higuera, Luisa, Estepa Castro, Antonio y García García, Francisco Javier (Coord.) *Sociedad, escuela y matemáticas aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85-100). Jaén: Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones.
- Artigue, Michèle (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6 (8), 13-33.
- Balacheff, Nicolas (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En Gorgorió Solá María Núria y Deulofeu Piquet Jordi (coords.) *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 93-108). Barcelona: Graó.
- Balacheff, Nicolas (2019). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. En Pilet Julia y Vendeira Céline (eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp.423-456). Paris : ARDM et IREM de Paris-Université de Paris Diderot.
- Chevallard, Yves (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), 221-266. Grenoble : Éditions La pensée sauvage.

- Chevallard, Yves (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (2), 161-182.
- De Villiers, Michael (2-4 Octubre de 1996). The future of Secondary School Geometry, conferencia. SOSI Geometry Imperfect Conference. Pretoria (Sudáfrica): UNISA.
- Fregona, Dilma y Báguena, Pilar (2011). *La noción de medio en la teoría de situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Gentile, Enzo (1987). Construcciones con regla y compás. *Revista de Educación Matemática*, 3(2), 3-14. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.
- Jones, Keith y Fujita, Taro (2001). Developing a new pedagogy for geometry. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21 (3), 90-95.
- Royal Society y Joint Mathematical Council (2001). *Teaching and Learning Geometry*. London, Royal Society/Joint Mathematical Council.
- Sánchez Sánchez, Ernesto (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación Matemática*, 15(2), pp. 27-53.

