ISBN 978-950-33-1673-3

Edición de
María Paula Buteler
Ignacio Heredia
Santiago Marengo
Sofía Mondaca

Filosofía de la Ciencia
por Jóvenes Investigadores

vol.2

Filosofía de la Ciencia por Jóvenes Investigadores

vol. 2

Edición de

María Paula Buteler
Ignacio Heredia
Santiago Marengo
Sofía Mondaca

Colecciones del CIFFyH

Filosofía de la Ciencia por Jóvenes Investigadores vol. 2 / Ignacio Heredia ... [et al.]; editado por María Paula Buteler... [et al.]. - 1a ed. - Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Filosofía y Humanidades, 2022.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-950-33-1673-3

1. Filosofía de la Ciencia. 2. Jóvenes. I. Heredia, Ignacio. II. Buteler, María Paula, ed.
CDD 121

Publicado por
Área de Publicaciones de la Facultad de Filosofía y Humanidades - UNC
Córdoba - Argentina
1º Edición

Área de
Publicaciones

Diseño de portadas: Manuel Coll
Diagramación: María Bella
Imagen de cubierta y contracubierta: Detalle del retrato de Carpenter (1836), autora: Margaret Sarah Carpenter. Imagen de dominio público editada por Martina Schilling.
Imagen de portads interiores: Retrato de Ada Lovelace, autore desconocide, circa 1840. Seis diseños en color por Ignacio Heredia.

2022

La naturalidad de los números naturales

Alejandro Gracia Di Rienzo*

En este ensayo argumentaré que no podemos apelar a las verdades acerca de los números naturales para demostrar la existencia de entidades no espaciotemporales y causalmente inertes. Mi estrategia se centrará en criticar la asunción de que los números naturales deben ser, por necesidad conceptual, entidades de ese tipo.

Antes que nada, aclararé la terminología que voy a emplear. Entiendo el naturalismo como la hipótesis metafísica de que todo lo que existe está en el espacio-tiempo (Armstrong, 1997, p. 5). Un objeto abstracto es aquel que no tiene localización espacial ni duración temporal y es causalmente inerte (Balaguer, 1998, p. 4, Linnebo 2017, p. 9). El platonismo es la hipótesis de que existen objetos abstractos.

Argumento a favor del platonismo

Es habitual pensar que se puede apoyar el platonismo (y, por tanto, refutar el naturalismo) apelando a las verdades matemáticas, y concretamente a las verdades acerca de los números. Podemos esquematizar el argumento así:

(1) Si los teoremas de la aritmética son verdaderos, entonces existen los números.

(2) Los teoremas de la aritmética son verdaderos.

Por tanto,

(3) Existen los números.

(4) Necesariamente, los números naturales son objetos abstractos.

* UAM / a.gracia@outlook.es

Por tanto,

(5) Existen los objetos abstractos[1].

No es difícil ver por qué la conclusión de este argumento puede resultar incómoda para quienes tenemos una cosmovisión naturalista. El problema es el siguiente: si los objetos abstractos existieran, entonces ningún proceso causal podría conectarlos con nosotros ya que, por definición, los objetos abstractos son causalmente inertes (es decir, no mantienen relaciones causales). Pero entonces no estaría claro cómo podríamos conocerlos, ya que nuestro conocimiento depende, en última instancia, de interacciones causales con nuestro entorno, especialmente mediante la percepción (o eso solemos asumir los naturalistas). Este es el célebre problema epistemológico planteado por Benacerraf (1973). Para evitar el problema, un naturalista podría razonar así: "los objetos abstractos no existen. De modo que los números no existen, y por tanto los enunciados existenciales de la aritmética son, estrictamente hablando, falsos. Para salvar el conocimiento aritmético podemos reinterpretarlo de manera que no sea conocimiento de la verdad de los teoremas sino, por ejemplo, conocimiento sobre qué se sigue de los axiomas de la aritmética"[2].

Pero aquí el platónico puede responder lo siguiente: "tú, naturalista, partes de premisas filosóficas para sacar la conclusión de que las teorías matemáticas son falsas. En cambio, los platónicos ponemos las matemáticas primero: nos basamos en su verdad y sacamos la conclusión filosófica de que el naturalismo es falso. Al fin y al cabo, la ciencia debe guiar a la filosofía, y si una teoría filosófica es incompatible con una teoría científica, eso es una razón para abandonar la teoría filosófica, no la teoría científica"[3].

Una de dos: o nos apoyamos en presupuestos filosóficos como el naturalismo y la idea (debatible) de que todo nuestro conocimiento requiere

[1] Una versión de este argumento se encuentra expuesta en Balaguer (1998, p. 95).

[2] Esta concepción se conoce como "deductivismo" (Balaguer, 1998, pp. 11-12, Linnebo, 2017, p. 48).

[3] Aquí vienen a la mente las palabras de Lewis: "Las matemáticas son una preocupación consolidada y constante. La filosofía es tan inestable como puede serlo. Rechazar las matemáticas por razones filosóficas sería absurdo" [Traducción de lxs editores] (Lewis, 1998, p. 218). ["Mathematics is an established, ongoing concern. Philosophy is as shaky as can be. To reject mathematics for philosophical reasons would be absurd"].

interacciones causales con el entorno, o nos apoyamos en la verdad de las matemáticas y aceptamos sus consecuencias, por indeseables que puedan resultar para nuestros prejuicios filosóficos.

Ahora bien, conviene percatarse de que la dialéctica entre el platónico y el naturalista depende crucialmente de la premisa (4). El naturalista razona por modus tollens: puesto que (4) es verdad, pero (5) es falso, se sigue que (3) es falso. El platónico razona por modus ponens: puesto que (4) es verdad y (3) también, se sigue que (5) es verdad. Ahora bien, cuando dos posiciones enfrentadas parten de una premisa común, conviene examinar esa premisa para averiguar si el debate se basa en un supuesto falso ya que, de ser así, el conflicto entre ambas posiciones sería ilusorio.

En el debate sobre la existencia de los objetos abstractos, tanto el nominalista como el platónico asumen la premisa (4) según la cual, por necesidad conceptual, los números son objetos abstractos. ¿Por qué habría que aceptar esta premisa? ¿por qué habría que pensar que los números naturales son necesariamente objetos abstractos? Tal vez a muchas personas esta pregunta les parezca desconcertante, ya que quizás piensen que el hecho de que los números son entidades abstractas es una trivialidad. Uno podría pensar que la oración "los números son abstractos" está al mismo nivel que "las piedras son concretas" o "los solteros no están casados": son afirmaciones verdaderas en virtud de cómo entendemos y usamos los conceptos de "número", "piedra" y "soltero".

Pero hay cuatro hechos que parecen ir en contra de esto. En primer lugar, ningún teorema de la aritmética afirma que los números sean entidades abstractas. La aritmética nos dice que 3 es primo, que es impar, que es el sucesor de 2, etc., pero no nos dice que el número 3 sea causalmente inerte o que esté fuera del espacio-tiempo. En otras palabras, si añadieramos a los axiomas de Peano la hipótesis de que el número 3 es un objeto concreto, no obtendríamos por ello ninguna inconsistencia que no fuera derivable ya sin tal hipótesis. Esta observación, por cierto, es particularmente relevante para la dialéctica entre el platónico y el naturalista por la siguiente razón: el platónico suele defender su posición profesando deferencia hacia la práctica científica. Al argumentar de esa manera, el platónico sugiere que su compromiso con la existencia de entidades matemáticas abstractas es una consecuencia de tomarse en serio "lo que la matemática dice", en lugar de "lo que ciertas posiciones filosóficas altamente discutibles dicen". Pero la matemática, y la aritmética en particular, no dice que sus objetos de estudio sean abstractos (i.e. no espaciotemporales y causalmente inertes). Así que la posición del platónico sí depende, al fin y al cabo, de ciertos compromisos filosóficos no derivados exclusivamente de atender a lo que la matemática dice.

En segundo lugar, la hipótesis de que los números son necesariamente objetos abstractos es irrelevante en nuestro aprendizaje matemático. Durante los años en los que estuve en la escuela y el instituto aprendiendo matemáticas, en ningún momento fue esencial que tuviera una opinión respecto a la pregunta de si los números eran o no entidades abstractas. Puede que en algún momento se me ocurriera pensar que los números habitan en un cielo platónico, pero esa idea nunca jugó un papel en mi formación, era una fantasía ociosa.

En tercer lugar, tampoco creo que esta hipótesis tenga mucha importancia para las investigaciones de los matemáticos y las matemáticas profesionales. Sin duda, muchos matemáticos pueden creer que están estudiando un mundo inmaterial de entidades eternas, pero esta hipótesis no juega ningún papel sustantivo en sus prácticas de investigación.

En cuarto lugar, tampoco es necesario asumir la premisa (4) a la hora de dominar lo que podemos llamar "destrezas numéricas básicas": contar, sumar, multiplicar, dividir, etc. Estas habilidades las ponemos en práctica diariamente, y al hacerlo necesitamos suponer muchas cosas. Por ejemplo, presuponemos que objetos como monedas, guijarros, e inscripciones mantienen su forma y su rigidez a lo largo del tiempo y que no se fusionan o multiplican espontáneamente como los "tigres azules" de Borges (1983). Pero no necesitamos presuponer que los números naturales sean entidades abstractas. Podríamos suponer (¿erróneamente?) que los números son los propios numerales (sus *tokens*) y eso ya de por sí sería incompatible con la premisa (4), pero no entorpecería el desempeño de nuestras destrezas numéricas básicas.

Ahora bien, considero que nuestra información más firme sobre los números naturales procede de estas cuatro fuentes: nuestras destrezas numéricas básicas; lo que aprendimos en nuestra formación matemática escolar; la aritmética entendida como una teoría axiomática y, por último, la teorización avanzada en la comunidad matemática. Estas son las fuentes principales de las que proviene nuestro concepto de número. Pero en los párrafos anteriores hemos visto que ninguna de estas fuentes nos proporciona elementos de juicio suficientes para creer que los números son necesariamente objetos abstractos. De modo que, a primera vista, esta hipótesis carece de fundamento[4].

Llegados a este punto, puede resultar tentador pensar lo siguiente: “sean cuales sean las razones que pueda haber para creer que los números son necesariamente objetos abstractos, el hecho de que esta hipótesis nos lleve al problema epistemológico de Benacerraf, junto con el hecho de que nuestra información más firme sobre los números sea insuficiente para apoyarla, parecen darnos una razón para no aceptar la hipótesis. Si la rechazamos, nos quitaremos de encima el problema de Benacerraf y (si el razonamiento de los párrafos anteriores es correcto) al hacerlo no estaríamos contraviniendo ninguno de nuestros conocimientos más firmes acerca de los números”.

Pero eso sería apresurado. Si bien es cierto que nuestra información más firme acerca de los números no nos permite justificar la premisa (4), tampoco nos permite justificar su negación. Y es posible que haya razones filosóficas para aceptar la premisa (4), razones que no podemos extraer directamente de nuestra “información más firme” acerca de los números, sino que requieren una teorización metafísica más sutil. Al fin y al cabo, hay muchas cosas verdaderas cuyo conocimiento es irrelevante para el aprendizaje de muchos temas, para la teorización experta sobre ellos y para el desempeño de habilidades relacionadas con ellos. Quizás esto es lo que ocurre con la proposición “los números son objetos abstractos”[5]. Así que conviene pararse a examinar los argumentos filosóficos que pueden aducirse a favor de la premisa (4).

Algunos argumentos filosóficos a favor de la premisa (4)

En un artículo de 1895 titulado “Números enteros”, Frege propuso el siguiente argumento: los objetos espacio-temporales son mutables, pero los objetos a los que se refieren las verdades matemáticas deben ser inmutables, ya que las verdades matemáticas son eternas (son siempre verdaderas). De modo que los números no pueden ser objetos espacio-temporales.

[4] Agustín Mauro y María Fissore me han sugerido considerar, además, los datos provenientes de la historia del pensamiento matemático y la etnomatemática. En efecto, a lo largo de la historia la tesis de que los números son entidades abstractas no ha sido la opinión mayoritaria, lo cual favorece mi argumento. No obstante, demostrar esto requeriría un trabajo histórico pormenorizado que no puedo hacer aquí.

[5] Agradezco al revisor/a del texto el haberme planteado este problema.

Este argumento se basa en dos asunciones: (a) que las verdades matemáticas son eternas y (b) que los referentes de una verdad eterna deben ser entidades inmutables. No sabría cómo argumentar en contra de la primera asunción, pero creo que la segunda no es defendible. Consideremos un mundo en el que existen ab aeterno e in aeternum ciertas entidades mutables que se crean y se destruyen continuamente, pero de tal manera que sus períodos de existencia se solapan, así que siempre existen entidades de ese tipo. Llamemos “yahoos” a estas extravagantes entidades. En ese mundo, el enunciado “existen yahoos” es siempre verdadero, y por tanto expresa una verdad eterna. Pero ex hypothesi los yahoos son mutables. Así que aquí tenemos un contraejemplo contra la asunción (b) del argumento de Frege[6]. En consecuencia, el argumento de Frege es inválido, ya que es concebible que haya verdades eternas acerca de cosas mutables.

Pero tal vez el rasgo ontológicamente relevante de las verdades matemáticas no es su eternidad, sino su necesidad. Si los teoremas de la aritmética son verdades necesarias, entonces uno podría pensar que deben referirse a entidades inmutables; y a partir de ahí uno podría concluir que esas entidades deben ser abstractas. Mi problema con este argumento es que no tengo claro que las verdades aritméticas sean “necesarias” en un sentido obvio. Consideremos el teorema “$\exists x(x>7)$”. ¿En qué sentido es esto una verdad necesaria? Es evidente que “$\exists x(x>7)$” no es una verdad necesaria en sentido lógico, ya que su negación no es una contradicción[7].

¿Son los teoremas de la aritmética “metafísicamente necesarios”? Reconozco que me cuesta entender qué podría querer decir eso. Cuando decimos que algo es físicamente posible, por ejemplo, habitualmente queremos decir que es compatible con las leyes físicas de nuestro mundo[8]. Razonando por analogía, quizás “metafísicamente posible” quiere decir “compatible con los principios metafísicos más generales”, y entonces “*p* es una verdad metafísicamente necesaria” podría querer decir que $\neg p$ es incompatible con los principios metafísicos más generales. ¿Pero cuáles son estos principios? Se me ocurren algunos candidatos, todos ellos de-

[6] Este contraejemplo está inspirado en uno que ofrece Mackie contra de la 3ª vía de Tomás de Aquino (Mackie 1982).

[7] Hay algunas verdades matemáticas, como “7 + 5 = 12”, que en cierto sentido pueden considerarse verdades lógicas, ya que pueden traducirse a fórmulas de segundo orden lógicamente válidas. (Potter, 2000, p. 69).

[8] Sobre esta concepción de la necesidad física, véase Díez y Moulines (2008, p. 136-17).

batibles: alguna versión ontológica del principio de no contradicción, el principio de razón suficiente, el principio según el cual un efecto no puede ser anterior a su causa, etc. No se me ocurre ningún principio que sea incompatible con la negación de algún axioma de la aritmética, a menos que asumamos los axiomas de Peano como "principios metafísicos". Pero sería difícil justificar esa asunción sin incurrir en una petición de principio contra quienes no estamos convencidos de que los teoremas aritméticos sean metafísicamente necesarios. En conclusión, no está claro que podamos apelar a un supuesto estatuto necesario de los teoremas de la aritmética para apoyar la premisa (4) del argumento a favor del platonismo[9]. En cualquier caso, incluso concediendo que las verdades matemáticas fueran necesarias, de ahí no se seguiría que deben versar sobre objetos inmutables, ya que hay verdades necesarias que versan sobre objetos mutables. Por ejemplo, es necesariamente verdadero que una barra de metal no puede medir al mismo tiempo 5 metros y 10 metros, pero obviamente la barra no es un objeto inmutable.

Podría pensarse que hemos llegado a una aporía, ya que no parece que tengamos buenas razones para creer que los números naturales son, por necesidad conceptual, objetos abstractos, pero tampoco parece que tengamos buenas razones para pensar que son entidades concretas. Sin embargo, para refutar la premisa (4) del argumento a favor del platonismo no tenemos que argumentar a favor de la proposición "los números naturales son entidades concretas" (cosa que no pretendo hacer), sino a favor de la proposición "los números naturales podrían ser entidades concretas". He aquí una manera de hacerlo:

Un argumento en contra de la premisa (4)

Los axiomas de Peano condensan la información más precisa que tenemos acerca de los números naturales. Pueden verse como una sistematización del conocimiento que los seres humanos hemos acumulado históricamente sobre los números naturales. Desde tiempos ancestrales, los humanos hemos tenido que realizar las dos actividades fundamentales en las que se basa el conocimiento numérico: contar y ordenar. Podemos suponer (lo que no es muy especulativo) que estas necesidades prácticas fueron produciendo paulatinamente una familiaridad con el concepto de sucesión

[9] Mi argumento en este párrafo está inspirado en Balaguer (1998, p. 44).

con un primer elemento al cual podemos añadir siempre un elemento más.

Los axiomas de Peano pueden verse como una formulación exacta de las características que pensamos que tienen los números naturales ya que formalizan precisamente el concepto de sucesión infinita con un primer elemento. Esto significa que cualquier[10] colección de objetos que satisfaga esos axiomas puede fungir como la colección de los números naturales, ya que tendrá todas las características que pensamos que debe tener la secuencia de los números naturales. La idea que hay de fondo aquí es esta: si una colección de objetos puede hacer todo lo que queremos que hagan los números naturales (que nos sirvan para contar, para enumerar, etc.), ¿por qué no iban a merecer el nombre de "números naturales"? Pues bien, un sistema de objetos nos sirve para hacer esto cuando satisface los axiomas de Peano: estos axiomas meramente describen cómo debe ser un sistema de objetos para que pueda ocupar el rol de. Debe ser una secuencia infinita, con un primer elemento, y debe satisfacer el axioma de inducción. Nada más[11]. Esta idea no es una especulación filosófica ajena a la práctica matemática. Por ejemplo, en un manual moderno de álgebra leemos:

> [Los axiomas de Peano] caracterizan al conjunto de los números naturales, en el siguiente sentido: si K es un conjunto cualquiera con una aplicación (sucesor) $S: K \to K$ inyectiva pero no suprayectiva y tal que los subconjuntos de K verifican la propiedad enunciada por el teorema 2.2. [se refieren al principio de inducción] entonces K es el conjunto de los números naturales" (Goberna et. al*.,* 2000, p. 46).

Creo que esto ya nos da una razón en contra de la premisa (4), puesto que un sistema de objetos concretos podría ser un modelo de los axiomas de Peano (los axiomas desde luego no excluyen esta posibilidad), y por tanto esos objetos podrían ocupar el rol de ser los números naturales. Así que es concebible que los números naturales fueran objetos concretos. Por

[10] Si los axiomas de Peano se formulan en un lenguaje de primer orden, este "cualquier" debe ser matizado. La razón es que, debido al teorema de compacidad, los axiomas de Peano de primer orden admiten modelos no estándar, es decir, modelos que contienen elementos que no pueden ser considerados números naturales (por ejemplo, elementos que son mayores que cualquier número natural). Para evitar estos modelos no estándar debemos utilizar la aritmética de Peano de segundo orden, cuyos modelos sí son isomorfos entre sí (Manzano 1997, cap. III).

[11] Esta idea que acabo de presentar es parte de una concepción de los objetos matemáticos muy extendida hoy en día, conocida como estructuralismo matemático (véase Shapiro y Hellman 2019 para una introducción al estructuralismo y sus variantes).

tanto, la premisa (4) es falsa y el argumento a favor del platonismo queda bloqueado. Pero quedan un par de cabos sueltos.

Cabos sueltos

Uno podría objetar esto: un modelo concreto de los axiomas de Peano debe ser una secuencia que conste de infinitos objetos concretos. Pero no hay razón para suponer que de hecho existan infinitos objetos concretos en nuestro universo; y suponiendo que los hubiera, no habría razón para pensar que nuestros numerales se refieren a esos objetos, ya que no estamos familiarizados con ninguna colección infinita de objetos concretos. Así que es dudoso que en nuestro mundo haya objetos concretos aptos para ocupar el rol de los números naturales.

Creo que a esta objeción se puede responder lo siguiente. Tal vez no existe ninguna colección que ocupe a la perfección el rol de ser el sistema de los números naturales, pero sí hay sistemas que lo ocupan parcialmente: cualquier serie finita de objetos en las que haya un primer elemento exhibe parcialmente la estructura descrita por los axiomas de Peano, y en virtud de eso nos puede servir para contar, enumerar, etc. El ejemplo paradigmático de esto son las secuencias de numerales: "1", "1,2", "1,2,3", "1,2,3,4", etc. En este sentido, los teoremas de la aritmética pueden verse como un caso particular de un fenómeno muy habitual en la ciencia: son una idealización. Nuestra experiencia nos muestra series (finitas) de objetos que tienen una estructura apta para satisfacer nuestras necesidades de contar y enumerar; los axiomas de la aritmética describen cómo sería una serie perfecta, ideal. Pero esto no es razón para pensar que describen una serie de objetos que existen allende el espacio-tiempo.

Tal vez mi respuesta es insatisfactoria porque ignora que el argumento inicial a favor del platonismo establecía la existencia de los números (premisa (3)), no su mera posibilidad. Así que podría objetarse: si el argumento realmente establece que los números existen, entonces es irrelevante que sea concebible un mundo en el que los números son concretos. Si nuestro mundo físico es finito, entonces en nuestro mundo los números existen y no son concretos.

Creo que el estructuralismo defendido en la sección 4 me permite responder a esta objeción. Lo que tengo que hacer es rechazar la lectura intuitiva de teoremas como "$\exists x(x>100)$" "$\exists x(x=0+1)$"; es decir, niego que esos teoremas afirmen la existencia de algo[12]. Consideremos un ejemplo más simple: $\exists x \forall y(x \neq y + 1)$. En la lectura intuitiva que quiero rechazar, este teorema afirma la *existencia* de algo: el número 0. Pero si vemos los axiomas de Peano como una descripción de la estructura que debe tener una colección de objetos para poder ocupar el rol de la serie de los números naturales, podemos interpretar ese teorema como una afirmación acerca de la estructura de tales secuencias de objetos: nos dice que tales series siempre tienen un primer elemento. Es decir: si existiera un modelo de los axiomas de Peano, existiría en ese modelo un objeto que ocuparía el rol del número 0. Para un desarrollo técnicamente más sofisticado de esta estrategia, véase Hellman (1989).

Aunque tal vez habría que atar todavía algunos cabos sueltos, concluyo que no es probable que podamos establecer el platonismo y refutar el naturalismo apelando a lo que sabemos sobre los números naturales[13].

Referencias Bibliográficas

Armstrong, D. (1997). *A world of states of affairs.* Cambridge University Press.

Balaguer, M. (1998). *Platonism and anti-platonism in mathematics.* Oxford University Press.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy, 70(19),* 661–679.

Berto, F. (2010). *L'esistenza non è logica.* Editori Laterza.

Borges, J. L. (2012). La memoria de Shakespeare. En *Cuentos Completos.* Penguin Random House.

Díez, J., Moulines, U. (2008). *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia.* Ariel.

[12] Para un desarrollo más detallado de esto, véase Berto (2010).

[13] Agradezco a María Concepción Martínez Vidal sus comentarios al borrador de este artículo, y doy también las gracias a quienes me plantearon observaciones y objeciones durante la presentación del texto en las II Jornadas de Jóvenes Investigadores en Filosofía de la Ciencia: Germán Arroyo, Agustín Mauro, María Fissore, Santiago Marengo, Pablo Carrete y Andrés Martínez. Doy las gracias también a los revisores anónimos por sus sugerencias y críticas.

Frege, G. (1984). Whole numbers. En McGuinness, B. (Ed), *Collected papers on mathematics, logic and philosophy.* Blackwell.

Goberna, M. A., Jornet, V., Puente, R. y Rodríguez, M. (2000). *Álgebra y fundamentos.* Ariel.

Hellman, G. (1989). *Mathematics without Numbers.* Oxford University Press.

Hellman, G. y Shapiro, S. (2019). *Mathematical structuralism.* Cambridge University Press.

Lewis, D. (1998). *Papers in philosophical logic.* Cambridge University Press.

Linnebo, Ø. (2017). *Philosophy of mathematics.* Princeton University Press.

Mackie, J. L. (1982). *The miracle of theism: arguments for and against the existence of God.* Clarendon Press, Oxford University Press.

Manzano, M. (1996). *Extensions of first order logic.* Cambridge University Press.

Potter, M. (2000). *Reason's nearest kin: philosophies of arithmetic from Kant to Carnap.* Oxford University Press.